

### I. تحديد مجموعة:

#### A. نشاط و مفردات:

لتكن E مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة قطعا بين 3 و 7 .  
أكتب هذه المجموعة بطريقتين مختلفتين.

• نكتب المجموعة على الشكل التالي  $E = \{4, 5, 6\}$  . نقول أن E كتبت بالتفصيل écriture en extension

• نكتب E على الشكل:  $E = \{n \in \mathbb{N} / 3 < n < 7\}$  . نقول أننا عرفنا E بالإدراك écriture en compréhension

• يمكن أن نمثل بعض المجموعات على الشكل التالي: كل عنصر من E نكتبه في مكان ما ونضع بجواره الرمز x . أو • وتحاط كل العناصر بخط و خارج ذلك نكتب رمز المجموعة E . والشكل المحصل عليه يسمى مخطط فان diagramme de Venn

### B. تمرين تطبيقي:

1. أكتب المجموعة التالية بالإدراك : أ -  $F = ]-5, 5[$  . ب -  $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$

أكتب المجموعة التالية بالتفصيل : أ -  $B = \{d \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, 20 = k \times d\}$  . ب -  $C = \{p \in \mathbb{Z} / (p-3)(2p-5) = 0\}$

### II. التضمن – التضمن المزدوج ( التساوي ) – مجموعة أجزاء مجموعة:

#### A. التضمن – L' INCLUSION – التضمن المزدوج ( أو التساوي ) DOUBLE INCLUSION

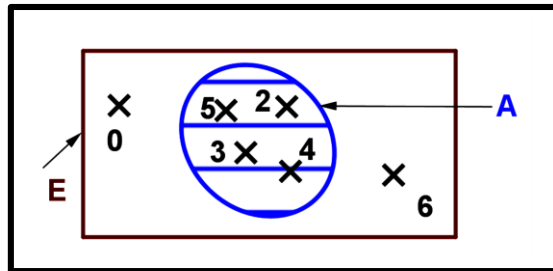
#### 1. تعريف:

نقول إن مجموعة A ضمن مجموعة B إذا وفقط إذا كان كل عنصر x من A فهو ينتمي إلى B ؛ و نكتب  $A \subset B$  .

إذن:  $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

#### 2. مثال:

نعتبر المجموعات التالية:  $E = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ؛  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  .  
نمثل E و A .



### B. التساوي ( أو التضمن المزدوج )

#### 1. تعريف:

نقول إن مجموعتين A و B متساويتين يكافئ  $A \subset B$  و  $B \subset A$  .

إذن:  $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ و } B \subset A)$

#### 2. ملحوظة:

التضمن متعدي:  $(A \subset B \text{ و } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

### 3. تمرين تطبيقي:

نعتبر المجموعتين:  $F = ]0, 1[$  و  $E = \left\{ \frac{1}{x} / x \in \mathbb{R} \text{ و } x > 1 \right\}$

بين أن:  $E = F$  .

نبين أن:  $E \subset F$  .

نعتبر  $y \in E$  إذن  $y = \frac{1}{x}$  حيث  $x > 1$  . ومنه  $\frac{1}{x} > 0$  و  $\frac{1}{x} < 1$  .

و بالتالي:  $0 < \frac{1}{x} < 1$  . إذن:  $0 < y < 1$

خلاصة 1:  $E \subset F$  .

نبين أن:  $F \subset E$  .

ليكن:  $y \in F$  إذن:  $0 < y < 1$  .



نضع :  $y = \frac{1}{x}$  ومنه :  $\frac{1}{x} < 1$  وبالتالي :  $x > 1$  . ومنه :  $y$  يكتب على شكل  $\frac{1}{x}$  مع  $x > 1$  ؛ بالتالي  $y \in E$  .

خلاصة 2 :  $F \subset E$  .

خلاصة :  $E \subset F$  و  $F \subset E$  إذن :  $E = F$  .

C. مجموعة أجزاء مجموعة:

1. نشاط:

نعتبر المجموعة :  $E = \{1, 2, 3\}$  . أو جد جميع أجزاء E .

2. تعريف:

E مجموعة.

جميع أجزاء E تكون مجموعة تسمى مجموعة أجزاء E و يرمز لها ب :  $\mathcal{P}(E)$  .

إذن :  $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$

3. ملحوظة:

• عناصر  $\mathcal{P}(E)$  هي أجزاء ( أي على شكل مجموعات ) .

•  $E = \emptyset$  .  $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$

4. تمرين تطبيق:

I. أكتب بالتفصيل :  $\mathcal{P}(E)$  حيث :

أ -  $E = \{2\}$  . ب -  $E = \{\emptyset\}$  . ج -  $E = \{1, 2\}$

جواب :

أ -  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$  .

ب -  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$  .

ج -  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$  .

د -  $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\{1, 2\}\}) = \{\emptyset, \{\{1, 2\}\}\}$

III. العمليات على المجموعات:

A. التقاطع :

1. تعريف:

A و B مجموعتان.

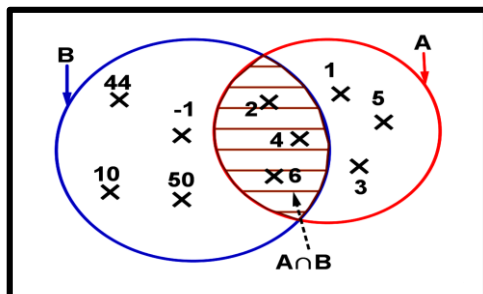
العناصر المشتركة ل A و B تكون مجموعة تسمى تقاطع A و B ويرمز لها ب :  $A \cap B$  .

إذن :  $A \cap B = \{x / x \in A \text{ و } x \in B\}$  .

2. ملحوظة :  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B$  ( نستعملها في التمارين )

3. مثال:

نأخذ :  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$





#### 4. تمرين تطبيقي :

$$A = \{p \in \mathbb{Z} / 2 \leq |p| \leq 5\} . \text{ حدد التقاطع : } A \cap ]-\infty, 3[$$

#### 5. خاصيات:

1-  $A \cap A = A$  ؛  $A \cap \emptyset = \emptyset$

2-  $A \cap B \subset B$  و  $A \cap B \subset A$

3-  $A \cap B = B \cap A$  . التقاطع تبادلي

4-  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$

#### 6. برهان للتجمعية :

جواب:

(4) نبين أن:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  ( نرسم للعطف ب  $\wedge$  و بالفصل ب  $\vee$  )

لدينا :

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \quad (\text{حسب تعريف التقاطع})$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \quad (\text{حسب تعريف التقاطع})$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \quad (\text{العطف تجميعي})$$

ومنه :  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

#### B. الاتحاد:

#### 1. تعريف:

A و B مجموعتان.

مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو تنتمي إلى B تسمى اتحاد المجموعتين A و B و يرمز لها ب :  $A \cup B$ .

إن:  $A \cup B = \{x / x \in A \text{ أو } x \in B\}$

#### 2. ملحوظة: $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ أو } x \in B$ . ( نستعملها في التمارين )

#### 3. مثال:

نأخذ:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$

لدينا:  $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 44, 50\}$

#### 4. خاصيات:

A و B و C مجموعات.

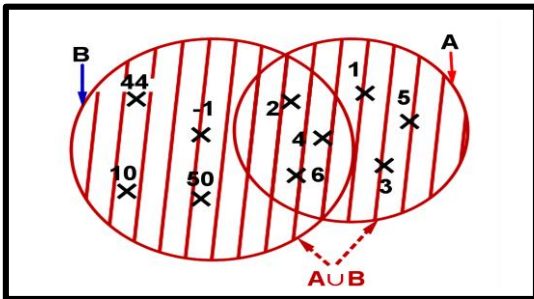
1-  $A \cup \emptyset = A$  و  $A \cup A = A$

2-  $B \subset (A \cup B)$  و  $A \subset (A \cup B)$

3-  $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$

4-  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cap B \cap C$

#### 5. تمرين تطبيقي:





1. بين أن التقاطع  $\cap$  توزيعي على الاتحاد  $\cup$  من جهة اليمين: (أي ما يلي)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

جواب:

5) نبين على صحة التوزيعية على اليسار:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (نرمز للعطف ب  $\wedge$  و بالفصل ب  $\vee$ )

نضع:  $x \in A \cap (B \cup C)$  هي العلاقة (1)

$$(1) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \text{ ومنه:}$$

بنفس الطريقة نبين على صحة التوزيعية على اليمين:  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ .

طريقة 2: لكي نبين  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$  (نستعمل أن التقاطع و الاتحاد تبادلي).

نبين أن:  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

لدينا: (لأن التقاطع تبادلي)  $(A \cup B) \cap C = C \cap (A \cup B)$

(حسب التوزيعية على اليسار)  $= (C \cap A) \cup (C \cap B)$

(لأن العطف تبادلي)  $= (A \cap C) \cup (B \cap C)$

ومنه: التوزيعية على اليسار صحيحة  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

خلاصة: التقاطع  $\cap$  توزيعي على الاتحاد  $\cup$

C. الجزء المتمم.

1. تعريف:

A جزء من مجموعة E  $(A \subset E)$ . المجموعة B المكونة من جميع عناصر E التي لا تنتمي ل A تكون جزء من E يسمى الجزء

المتم ل A في E. يرمز له ب  $\bar{A}$  أو أيضا ب  $B = C_E^A$

إذن:  $x \in C_E^A \Leftrightarrow x \in E \text{ و } x \notin A$  (نستعملها في التمارين)

2. أمثلة:

$$C_{\mathbb{R}}^{[1,3]} = ]-\infty, 1[ \cup ]3, +\infty[ \text{ و } C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}^*$$

3. ملحوظة:

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin \bar{A}$$

4. خاصيات:

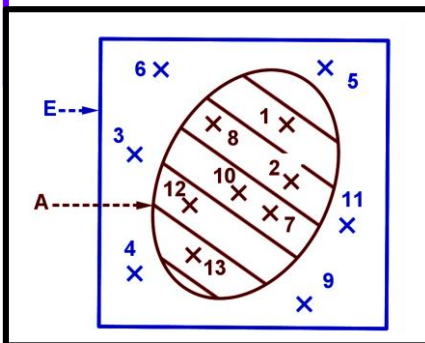
E مجموعة.

$$C_E^{\emptyset} = E \text{ و } C_E^E = \emptyset \text{ و } \bar{\bar{A}} = A \text{ أي } C_E^A = \bar{A}$$

$$A \cup \bar{A} = A \cup C_E^A = E \text{ و } A \cap \bar{A} = A \cap C_E^A = \emptyset$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \text{ و } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

5. برهان:





نبرهن على صحة الخاصية الأخيرة.

• نبرهن أن:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin A \cup B$$

$$\Leftrightarrow x \in E \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in E \wedge x \notin A) \wedge (x \in E \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

خلاصة:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

• نبين على:  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  بطريقة أخرى

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

خلاصة:  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

D. الفرق:

1. تعريف:

A و B مجموعتان.

المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B تسمى **فرق المجموع A** ثم **المجموعة B** ويرمز لها ب:  $A \setminus B$

إذن:  $A \setminus B = \{x / (x \in A \text{ و } x \notin B)\}$

إذن:  $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \notin B$  (نستعملها في التمارين)

2. ملحوظة: A و B جزآن من مجموعة E لدينا:  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

3. أمثلة:

مثال 1:

نأخذ:  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\}$

لدينا:  $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$  و  $B \setminus A = \{-1, 10, 44, 50\}$

4. تمرين تطبيقي:

حدد:  $A \setminus B$  ثم  $B \setminus A$  مع.

أ-  $A = \mathbb{Z}$  و  $B = \mathbb{N}^*$

ب-  $A = \mathbb{R}$  و  $B = [1, 5[$

E. الفرق التماثلي:

1. تعريف:

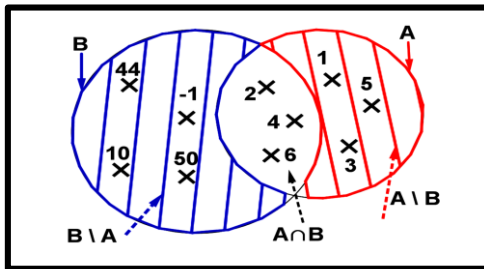
الفرق التماثلي للمجموعتين A و B هو معرف بما يلي:  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ . ويرمز له ب:  $A \Delta B$ .

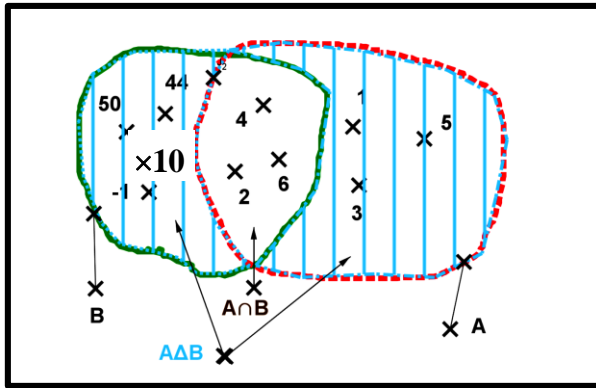
إذن:  $A \Delta B = \{x / (x \in A \text{ و } x \notin B) \text{ أو } (x \in B \text{ و } x \notin A)\}$

2. ملحوظة: إذن:  $x \in A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \cup B \text{ و } x \notin A \cap B$  (نستعملها في التمارين)

3. مثال:

نعتبر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\}$





نحدد :  $A \cap B = \{2, 4, 6\}$  و  $A \Delta B = \{-1, 1, 3, 5, 10, 44, 50\}$

نمثل  $A \cap B$  و  $A \Delta B$  باستعمال مخطط فان.

4. ملحوظة:

- $A \Delta B = B \Delta A$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

F. الجداء الديكارتي

1. تعريف:

E و F مجموعتان:

المجموعة المكونة من جميع الأزواج  $(x, y)$  حيث  $x \in E$  و  $y \in F$  تسمى الجداء الديكارتي لـ E ثم F (الترتيب مهم) ويرمز لها بـ  $E \times F$ .

إن:  $E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ و } y \in F\}$

2. ملحوظة:  $(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow x \in E \text{ و } y \in F$  (نستعملها في التمارين)

3. مثال:

نأخذ:  $A = \{1, 2\}$  و  $B = \{2, 3, 4\}$

لدينا:  $A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4)\}$

4. ملحوظة:

$$E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$$

5. تمرين تطبيقي:

1. أكتب بالتفصيل:  $E \times F$  مع  $E = \{1, 2\}$  و  $F = \{1, 2, 3\}$

2. A جزء من المجموعة E. B جزء من المجموعة F.

بين أن:  $(A \subset E \text{ و } B \subset F) \Rightarrow A \times B \subset E \times F$

6. تعميم

•  $E_1$  و  $E_2$  و  $E_3$  ثلاث مجموعات حيث  $x_1 \in E_1$  و  $x_2 \in E_2$  و  $x_3 \in E_3$  الكتابة  $(x_1, x_2, x_3)$  تسمى مثلث و هو عنصر من الجداء

الديكارتي لـ  $E_1$  و  $E_2$  و  $E_3$  في هذا الترتيب ويرمز له بـ  $E_1 \times E_2 \times E_3$ .

• بصفة عامة: نعتبر المجموعات  $E_i$  مع  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ؛ الجداء الديكارتي لـ  $E_1$  و  $E_2$  و  $E_3$  و ..... في هذا الترتيب هي

المجموعة التي يرمز لها بـ:  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  أو أيضا بـ  $\prod_{j=1}^n E_j$

عناصر  $\prod_{j=1}^n E_j$  تكتب على شكل:  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  وتسمى n-uplets. مع  $x_1 \in E_1$  و  $x_2 \in E_2$  و ..... و  $x_n \in E_n$

ومنه:  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  أو أيضا:  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^n E_j$

• حالة خاصة:  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$  نكتب:  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  باختصار  $E^n$ . مثال:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$

7. مثال:

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$  ولدينا: المثلث  $(2, -5, \sqrt{7}) \in \mathbb{R}^3$  ونكتب:  $(2, -5, \sqrt{7}) \in \mathbb{R}^3$