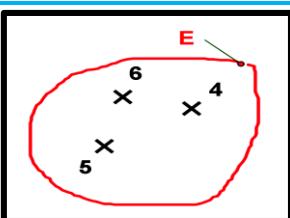




## درس : المجموعات



**I.** تحديد مجموعة:

**A.** نشاط و مفردات:

لتكن  $E$  مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحسوبة قطعاً بين 3 و 7 .  
أكتب هذه المجموعة بطريقتين مختلفتين.

- نكتب المجموعة على الشكل التالي  $\{4, 5, 6\} = E$ . نقول أن  $E$  كتبت بالتفصيل écriture en extension .
- نكتب  $E$  على الشكل:  $\{n \in \mathbb{N} / 3 < n < 7\} = E$ . نقول أننا عرفنا  $E$  بالإدراك écriture en compréhension .
- يمكن أن نمثل بعض المجموعات على الشكل التالي: كل عنصر من  $E$  نكتبه في مكان ما ونضع بجواره الرمز  $\times$  أو  $\circ$  وتحاط كل العناصر بخط و خارج ذلك نكتب رمز المجموعة  $E$  . والشكل المحصل عليه يسمى مخطط فان diagramme de Venn .

**B.** ترين تطبيقي:

**1.** أكتب المجموعة التالية بالإدراك :  $A = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$  . ب -  $F = [5, 5, \dots]$

أكتب المجموعة التالية بالتفصيل :  $C = \{p \in \mathbb{Z} / (p-3)(2p-5) = 0\}$  . ب .  $B = \{d \in \mathbb{N} / \exists k \in \mathbb{N}, 20 = k \times d\}$

**II.** التضمن – التضمن المزدوج ( التساوي ) – مجموعة أجزاء مجموعة:

**A.** التضمن – L ' INCLUSION – التضمن المزدوج ( أو التساوي )

**1.** تعريف:

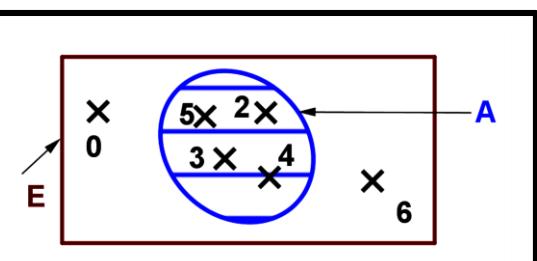
نقول إن مجموعة  $A$  ضمن مجموعة  $B$  إذا وفقط إذا كان كل عنصر  $x$  من  $A$  فهو ينتمي إلى  $B$  ; ونكتب  $A \subset B$  .

إذن:  $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$

**2.** مثال:

نعتبر المجموعات التالية:  $A = \{2, 3, 4, 5\}$  ،  $E = \{0, 2, 3, 4, 5, 6\}$  .

نمثل  $E$  و  $A$  .



**B.** التساوي ( أو التضمن المزدوج )

**1.** تعريف:

نقول إن مجموعتين  $A$  و  $B$  متساويتين يكفي  $B \subset A$  و  $A \subset B$  .

إذن:  $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ و } B \subset A)$

**2.** ملحوظة:

التضمن متعدد:  $(A \subset B \text{ و } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

**3.** ترين تطبيقي:

نعتبر المجموعتين:  $E = \left\{ \frac{1}{x} / x \in \mathbb{R} \right\}$  و  $F = [0, 1]$

بين أن:  $E = F$  .

نبين أن:  $E \subset F$  .

نعتبر  $y \in E$  إذن  $\frac{1}{x} = y$  حيث  $1 > x$  . ومنه  $0 < \frac{1}{x} < 1$  .

و بالتالي:  $0 < \frac{1}{x} < 1$  . إذن:  $0 < y < 1$

خلاصة 1 :  $E \subset F$  .

نبين أن:  $F \subset E$  .

ليكن:  $0 < y \in F$  إذن:  $0 < y < 1$



## درس : المجموعات

نضع :  $y = \frac{1}{x}$  ومنه:  $1 < x$ . و منه:  $y$  يكتب على شكل  $\frac{1}{x}$  مع  $x > 1$  ؛ وبالتالي  $y \in E$ .

خلاصة ٢ :  $F \subset E$

خلاصة :  $E = F$  و  $E \subset F$  إذن:  $E \subset F$

C. مجموعة أجزاء مجموعة:

**١.** نشاط:

نعتبر المجموعة:  $E = \{1, 2, 3\}$ . أو جد جميع أجزاء  $E$ .

**٢.** تعريف:

مجموعة  $E$

جميع أجزاء  $E$  تكون مجموعة تسمى مجموعة أجزاء  $E$  ويرمز لها بـ  $\mathcal{P}(E)$

$$\text{إذن: } A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$$

**٣.** ملحوظة:

• عناصر  $\mathcal{P}(E)$  هي أجزاء (أي على شكلمجموعات).

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\} . E = \emptyset$$

**٤.** تمرين تطبيق:

١. أكتب بالتفصيل:  $\mathcal{P}(E)$  حيث:

$$E = \{1, 2\}$$

جواب :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1, 2\}\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(\{2\}) = \{\emptyset, \{2\}\}$$

**III.** العمليات على المجموعات:

A. التقاطع :

**١.** تعريف:

و  $B$  مجموعتان.

العناصر المشتركة ل  $A$  و  $B$  تكون مجموعة تسمى تقاطع  $A$  و  $B$  ويرمز لها بـ  $A \cap B$ :

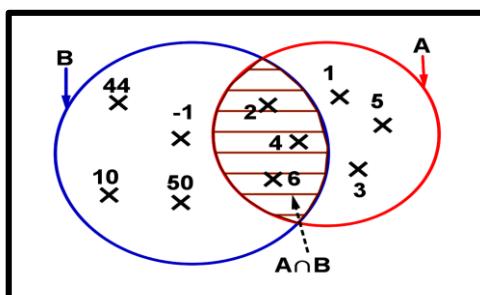
$$\text{إذن: } A \cap B = \{x / x \in A \text{ و } x \in B\}$$

**٢.** ملحوظة:  $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ و } x \in B$  (نستعملها في التمارين)

**٣.** مثال:

$$B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\} \text{ و } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نأخذ:





## ٤. تمرين تطبيقي :

.  $A \cap ]-\infty, 3]$  . حدد التقاطع :  $A = \{p \in \mathbb{Z} / 2 \leq |p| \leq 5\}$

## ٥. خصائص :

$$A \cap A = A ; A \cap \emptyset = \emptyset \quad \underline{\underline{1}}$$

$$A \cap B \subset B \text{ و } A \cap B \subset A \quad \underline{\underline{2}}$$

$$\text{التقاطع تبادلي. } A \cap B = B \cap A \quad \underline{\underline{3}}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C \quad \underline{\underline{4}}$$

## ٦. برهان للتجمعيّة :

**جواب:**

(٤) نبين أن:  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  (نرمز للعطف بـ  $\wedge$  وبالفصل بـ  $\vee$ )

لدينا :

$$x \in (A \cap B) \cap C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \in C \quad (\text{حسب تعريف التقاطع})$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C \quad (\text{حسب تعريف التقاطع})$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \in C) \quad (\text{العطف تجمعي})$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (\text{ومنه})$$

**B.** الاتّحاد:

## ١. تعريف:

**A** و **B** مجموعتان.

مجموعة العناصر التي تنتمي إلى **A** أو تنتمي إلى **B** تسمى اتحاد المجموعتين **A** و **B** ويرمز لها بـ  $A \cup B$ .

$$\text{إذن: } A \cup B = \{x / x \in A \text{ أو } x \in B\}$$

**٢. ملاحظة:**  $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ أو } x \in B$  . (نستعملها في التمارين)

**٣. مثال:**

$$B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\} \text{ و } A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A \cup B = \{-1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 44, 50\}$$

## ٤. خصائص:

**A** و **B** و **C** مجموعات.

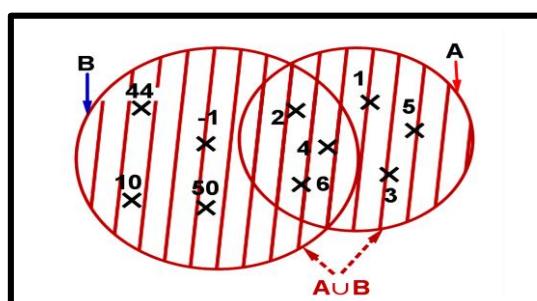
$$A \cup \emptyset = A \text{ و } A \cup A = A \quad \underline{\underline{1}}$$

$$B \subset (A \cup B) \text{ و } A \subset (A \cup B) \quad \underline{\underline{2}}$$

$$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \quad \underline{\underline{3}}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cap B \cap C \quad \underline{\underline{4}}$$

## ٥. تمرين تطبيقي:





## درس : المجموعات

١. بين أن التقاطع  $\cap$  توزيعي على الاتحاد  $\cup$  من جهة اليمين: (أي ما يلي) (جواب: )

(٥) نبين على صحة التوزيعية على اليسار:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (نرمز للعطف بـ  $\wedge$  وبالاتحاد بـ  $\vee$ )  
نضع:  $x \in A \cap (B \cup C)$  هي العلاقة (١)

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \vee x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ \text{ومنه: } A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

بنفس الطريقة نبين على صحة التوزيعية على اليمين:  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$ : طريقة ٢ : لكي نبين  $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$  (نستعمل أن التقاطع و الاتحاد تبادلي).  
نبين أن:  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$\begin{aligned} (A \cup B) \cap C &= C \cap (A \cup B) \quad (\text{لأن التقاطع تبادلي}) \\ &= (C \cap A) \cup (C \cap B) \quad (\text{حسب التوزيعية على اليسار}) \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (\text{لأن العطف تبادلي}) \end{aligned}$$

ومنه: التوزيعية على اليسار صحيحة .  
خلاصة: التقاطع  $\cap$  توزيعي على الاتحاد  $\cup$

### C. الجزء المتمم

#### ١. تعريف:

جزء من مجموعة  $E$  ( $A \subset E$ ). المجموعة  $B$  المكونة من جميع عناصر  $E$  التي لا تنتمي ل  $A$  تكون جزء من  $E$  يسمى الجزء

المتمم ل  $A$  في  $E$ . يرمز له ب  $\bar{A}$  أو أيضا ب  $B = C_E^A$

إذن:  $x \in C_E^A \Leftrightarrow x \in E \text{ و } x \notin A$  . (نستعملها في التمارين)

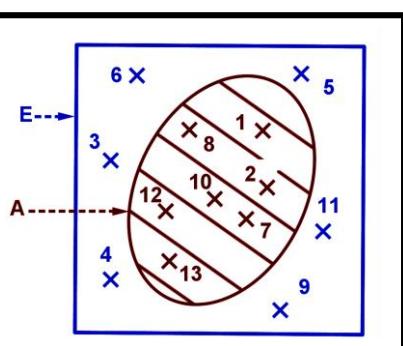
#### ٢. أمثلة:

$$C_{\mathbb{R}}^{[1,3]} = ]-\infty, 1] \cup [3, +\infty[ \text{ و } C_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}^{-*}$$

#### ٣. ملاحظة :

$$x \in A \Leftrightarrow x \notin \bar{A}$$

#### ٤. خصائص:



مجموعة  $E$

$$\cdot C_E^{\bar{A}} = A \quad \text{أي } \bar{\bar{A}} = A \text{ و } C_E^E = \emptyset \text{ و } C_E^{\emptyset} = E$$

$$\cdot A \cup \bar{A} = A \cup C_E^A = E \text{ و } A \cap \bar{A} = A \cap C_E^A = \emptyset$$

$$\cdot \bar{A} \cap B = \bar{A} \cup B \text{ و } \bar{A} \cup B = \bar{A} \cap B$$

#### ٥. برهان:



نبرهن على صحة الخاصية الأخيرة.

• نبرهن أن:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \in E \wedge x \notin A \cup B$$

$$\Leftrightarrow x \in E \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in E \wedge x \notin A) \wedge (x \in E \wedge x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \wedge x \in \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

خلاصة:  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

• نبين على:  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$  بطريقة أخرى

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B$$

$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \vee x \in \overline{B}$$

$$\Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$$

خلاصة:  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

D. الفرق:

1. تعريف:

A و B مجموعتان.

المجموعة المكونة من العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B تسمى فرق المجموعة A ثم المجموعة B ويرمز لها ب:  $A \setminus B$

$$\text{إذن: } A \setminus B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B)\}$$

إذن:  $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$  . (نستعملها في التمارين)

2. ملحوظة: A و B جزء من مجموعة E لدينا:  $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

3. أمثلة:

مثال 1:

$$B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{لدينا: } B \setminus A = \{-1, 10, 44, 50\} \quad A \setminus B = \{1, 3, 5\}$$

4. تطبيقي :

حدد:  $B \setminus A$  ثم  $A \setminus B$  مع.

$$\text{أ. } B = \mathbb{N}^* \quad A = \mathbb{Z}$$

$$\text{ب. } B = [1, 5] \quad A = \mathbb{R}$$

E. الفرق التماثلي:

1. تعريف:

الفرق التماثلي للمجموعتين A و B هو معرف بما يلي:  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  . ويرمز له ب:  $A \Delta B$

$$\text{إذن: } A \Delta B = \{x / (x \in A \wedge x \notin B) \text{ أو } (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

2. ملحوظة: إذن:  $B \setminus A = A \Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B$  . (نستعملها في التمارين)

3. أمثلة:

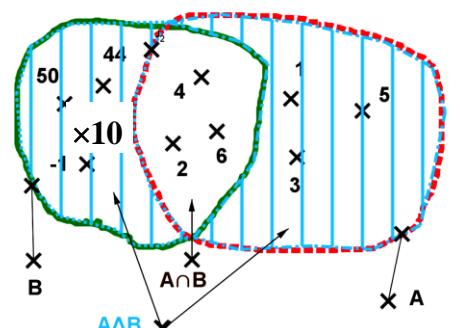
مثال:

$$B = \{-1, 2, 4, 6, 10, 44, 50\} \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نعتبر



## درس : المجموعات



$$\text{نحد: } A \Delta B = \{-1, 1, 3, 5, 10, 44, 50\} \quad A \cap B = \{2, 4, 6\}$$

نمثل  $A \Delta B$  و  $A \cap B$  باستعمال مخطط فان.

**4. ملحوظة:**

- $A \Delta B = B \Delta A$
- $. A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- $. A \Delta B = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{A})$

**F. الجداء الديكارتي**

**1. تعريف:**

و  $F$  مجموعاتان:  $E$  المجموعة المكونة من جميع الأزواج  $(x, y)$  حيث  $x \in E$  و  $y \in F$  تسمى الجداء الديكارتي ل  $E$  ثم  $F$  (الترتيب مهم) ويرمز لها ب  $E \times F$ .

$$\text{إذن: } E \times F = \{(x, y) / x \in E \text{ و } y \in F\}$$

**2. ملحوظة:**  $(x, y) \in E \times F \Leftrightarrow x \in E \text{ و } y \in F$  (نستعملها في التمارين)

**3. مثال:**

$$\text{نأخذ: } B = \{2, 3, 4\} \quad \text{و} \quad A = \{1, 2\}$$

$$A \times B = \{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 2); (2, 3); (2, 4)\}$$

لدينا:

**4. ملحوظة:**

$$E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$$

**5. تمرن تطبيقي:**

1. أكتب بالتفصيل:  $E \times F$  مع  $E = \{1, 2\}$  و  $F = \{1, 2, 3\}$
2.  $A$  جزء من المجموعة  $E$ .  $B$  جزء من المجموعة  $F$ .  
بين أن:  $(A \subset E \text{ و } B \subset F) \Rightarrow A \times B \subset E \times F$

**6. تعميم:**

•  $E_1$  و  $E_2$  و  $E_3$  ثلاثة مجموعات حيث  $x_1 \in E_1$  و  $x_2 \in E_2$  و  $x_3 \in E_3$  الكتابة  $(x_1, x_2, x_3)$  تسمى مثلث و هو عنصر من الجداء الديكارتي ل  $E_1$  و  $E_2$  و  $E_3$  في هذا الترتيب و يرمز لها ب  $E_1 \times E_2 \times E_3$ .

• بصفة عامة: نعتبر المجموعات  $E_i$  مع  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  الجداء الديكارتي ل  $E_1$  و  $E_2$  و  $E_3$  و ..... و  $E_n$  في هذا الترتيب هي

$$\cdot \prod_{j=1}^{j=n} E_j \text{ أو أيضاً } E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$

عناصر  $E_j$  تكتب على شكل:  $\prod_{j=1}^{j=n} E_j$  وتسماى  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  وتسماى  $n$ -uplets.

ومنه:  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \prod_{j=1}^{j=n} E_j$  أو أيضاً:  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$

• حالة خاصة:  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$  . نكتب:  $E_1 = E_2 = \dots = E_n = E$  . مثلاً:

**7. مثال:**

$$\cdot (2, -5, \sqrt{7}) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{عنصر من } \mathbb{R}^3 \quad \text{و نكتب: } (2, -5, \sqrt{7}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$$