.01

.1 نحدد قيمة حقيقة العبارة $p\wedge(p\vee q)$, مع p صحيحة .

- بما أن p صحيحة فإن $(p\vee q)$ صحيحة .

p صحيحة و $(p\vee q)$ صحيحة , إذن $p\wedge(p\vee q)$ صحيحة .

.2 f دالة من مجال I ضمن $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, نعبر باستعمال جمل عما يلي :

$\forall(x,y)\in I^2, x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$ $\forall(x,y)\in I^2 , x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$

نعبر عن هذه العبارة بأن f تزايدية قطعا على I .

.3 نعبر باستعمال المكممات عمّا يلي :

f تنعدم مرة واحدة فقط على I .

$\exists ! x\in I \ ,f(x)=0$

.4 نعطي نفي العبارة P : $x\neq y$ و $\exists(x,y)\in I^2,f(x)=f(y)$.

$\bar{P}$: $\forall(x,y)\in I^2,f(x)\neq f(y)$ أو $x=y$

.5 ندرس هل $(\bar{p}\Rightarrow q)\Rightarrow p$ قانون منطقي :

نستدل على ذلك بفصل الحالات :

الحالة 1: p صحيحة:

بما أن p صحيحة فإن الاستلزام $(\bar{p}\Rightarrow q)\Rightarrow p$ صحيح مهما كانت قيمة حقيقة معطيات الاستلزام $(\bar{p}\Rightarrow q)$

الحالة 2 p خاطئة :

أ- حالة فرعية

q صحيحة اذن الاستلزام $(\bar{p}\Rightarrow q)$ صحيح ومنه :

$(\bar{p}\Rightarrow q)\Rightarrow p$ خاطئ لأن $(\bar{p}\Rightarrow q)$ صحيحة و p خاطئة

خلاصة : العبارة $(\bar{p}\Rightarrow q)\Rightarrow p$ ليست بقانون منطقي .

.02

.1 كتابة العبارة p دون استعمال الرمز $\Rightarrow$ أو التعبير: اذا كان .....فإن.

$$\forall x\in[0,+\infty[,\forall y\in[1,+\infty[\ : \left[\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\frac{1}{2}(x+y+1)\right]\Rightarrow(x=1 \text{ و } y=2)$$

$$\forall x\in[0,+\infty[,\forall y\in[1,+\infty[\ : \sqrt{x}+\sqrt{y-1}\neq\frac{1}{2}(x+y+1) \text{ أو } (x=1 \text{ و } y=2)$$

.2 النفي هو :

$$\exists x\in[0,+\infty[,\exists y\in[1,+\infty[\ : \sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\frac{1}{2}(x+y+1) \text{ و } (x\neq1 \text{ أو } y\neq2)$$

3. نكتب العبارة p باستعمال الاستلزام المضاد للعكس :

$$\forall x\in[0,+\infty[,\forall y\in[1,+\infty[:\ (x\neq 1 \text{ أو } y\neq 2) \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y-1}\neq\frac{1}{2}(x+y+1)$$

4. تحديد قيمة العبارة:

ليكن $x\geq 0$ و $y\geq 1$ حيث : $(1):\ \sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\frac{1}{2}(x+y+1)$

ومنه : $(1)\Rightarrow 2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}\right)=x+y+1$

$$\Rightarrow x-2\sqrt{x}+y-2\sqrt{y-1}+1=0$$

$$\Rightarrow \underbrace{x-2\sqrt{x}+1}-1+1\underbrace{-1+y-2\sqrt{y-1}+1}=0$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2=-\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2$$

$\Rightarrow \sqrt{x}-1=0$ و $\sqrt{y-1}-1=0$ (عدد موجب يساوي عدد سالب هو 0)

$\Rightarrow \sqrt{x}=1$ و $\sqrt{y-1}=1$

$\Rightarrow x=1$ و $y-1=1$

$\Rightarrow x=1\in[0,+\infty[$ و $y=2\in[1,+\infty[$

ومنه : $\left[\sqrt{x}+\sqrt{y-1}=\frac{1}{2}(x+y+1)\right]\Rightarrow(x=1 \text{ و } y=2)$

خلاصة : العبارة صحيحة .

.03

1. نبين باستعمال المثال المضاد أن : p' "$x\in\mathbb{R},\exists y\in\mathbb{R}; xy=2$" خاطئة. بما أن العبارة تبتدئ بمهما يكن x من $\mathbb{R}$ يكفي أن نأخذ $x=0$ ومنه $0y=2$ وهذا غير ممكن .

خلاصة : العبارة p' خاطئة .

2. نبين باستعمال التكافؤات المتتالية أن $S_n=1+2+\ldots+n\Leftrightarrow S_n=\frac{n(n+1)}{2}$:

لدينا :

$$S_n=1+2+\ldots+n\Leftrightarrow 2S_n=2(1+2+\ldots+n)$$

$$\Leftrightarrow 2S_n=(1+2+\ldots+(n-1)+n)(n+(n-1)+\ldots+2+1)$$

$$\Leftrightarrow 2S_n=(1+n)+(2+(n+1)+\ldots+((n-1)+2)+(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2S_n=(1+n)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)$$

$$\Leftrightarrow 2S_n=n(n+1)$$

$$\Leftrightarrow S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ومنه : $S_n=1+2+\ldots+n\Leftrightarrow S_n=\frac{n(n+1)}{2}$

خلاصة : التكافؤ صحيح.

3. نبين باستعمال الاستلزام المضاد للعكس.

$(\frac{a}{2}$ ليس بعدد صحيح زوجي$) \Rightarrow (a^2$ وليس بعدد صحيح مضاعف ل $16)$

الاستلزام المضاد للعكس هو :

$(a^2$ عدد صحيح مضاعف ل $16) \Rightarrow (\frac{a}{2}$ عدد صحيح زوجي$)$

لدينا : $(\frac{a}{2}$ عدد صحيح زوجي$) \Rightarrow \frac{a}{2} = 2k \quad /(k \in \mathbb{Z})$

$$\frac{a}{2} = 2k \Rightarrow a = 4k$$

$$\Rightarrow a^2 = 16k^2$$

و بالتالي a^2 عدد صحيح مضاعف ل 16.

اذن : $(a^2$ عدد صحيح مضاعف ل $16) \Rightarrow (\frac{a}{2}$ عدد صحيح زوجي$)$

خلاصة :

$(\frac{a}{2}$ ليس بعدد صحيح زوجي$) \Rightarrow (a^2$ ليس بعدد صحيح مضاعف ل $16)$

استلزام صحيح.

4. أ- تحديد مجموعة التعريف D بدلالة a و b.

$$(E) \ : \ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a+b+x}$$

ومنه و $x \in D_E \Rightarrow x \neq 0$ و $x \neq -(a+b)$

حالة 1 : $a+b \neq 0$

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \{0,-(a+b)\}$$

حالة 2 : $a+b=0$

$$D_E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ب- نحل المعادلة E باستعمال الاستدلال بفصل الحالات.

$$(E) \Leftrightarrow \frac{bx+ax+ab}{abx}=\frac{1}{a+b+x}$$

$$\Leftrightarrow (a=b+x)(bx+ax+ab)=abx$$

$$\Leftrightarrow abx+a^2x+a^2b+b^2x+abx+ab^2+bx^2+ax^2+abx=abx$$

$$\Leftrightarrow 3abx+x^2(a+b)+x(a^2+b^2)+(a^2b+ab^2)=abx$$

$$\Leftrightarrow 2abx+x^2(a+b)+x(a^2+b^2)+(a^2b+ab^2)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(a+b)+x(a^2+b^2+2ab)+(a^2b+ab^2)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(a+b)+x(a+b)^2+ab(a+b)=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)\left[x^2+x(a+b)+ab\right]=0$$

الحالة 1 : $a+b=0$

في هذه الحالة E تكتب على الشكل التالي

$$0=0$$

وهذا صحيح مهما تكن $x \in D_E$: $0=0$

الحالة 2 : $a+b \neq 0$

$$(E) \Leftrightarrow x^2+x(a+b)+ab=0$$

ط1 : $x^2-(-a-b)x+(-a)\times(-b)=0$

ومنه : $x_1=-a$ و $x_2=-b$

$S=\{-a,-b\}$

ط2 : لحل المعادلة 1 :

$\Delta=(a+b)^2-4ab=a^2+b^2-2ab=(a-b)^2$

ومنه المعادلة لها حلان.

$x_1=\dfrac{-(a+b)-\sqrt{(a-b)^2}}{2}$ و $x_2=\dfrac{-(a+b)+\sqrt{(a-b)^2}}{2}$

$=\dfrac{-(a+b)-|a-b|}{2}$ و $=\dfrac{-(a+b)+|a-b|}{2}$

في كلتا الحالتين : $a-b>0$ أو $a-b<0$

الحلين هما : $-a$ و $-b$

مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

الحالة 1 : $a+b=0$

$S_E=Df=\mathbb{R}^*$

الحالة 2 : $a+b\neq 0$

$S_E=\{-a,-b\}$

.04

1. نبين ان :

$\exists k\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}: 3.5^{2n+1}+2^{3n+1}$

نبين أن العدد $3.5^{2n+1}+2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17.

* نستدل على ذلك بالترجع.

* نتحقق ان العلاقة (1) صحيحة من أجل $n=0$

لدينا : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}=17$

ومنه العلاقة صحيحة ل $n=0$

* نفترض أن العلاقة (1) صحيحة الى n.

أي أن : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17. (معطيات الترجع).

* نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ أي نبين أن :

$$A_{n+1}=3\times 5^{2(n+1)+1}+2^{3(n+1)+1}$$
$$=3\times 5^{2n+3}+2^{3n+4}$$
$$=3\times 5^{2n+1}\times 5^2\times 2^{3n+1}\times 2^3$$
$$=3\times 5^{2n+1}\times(17+8)\times 2^{3n+1}\times 8$$
$$=8\left(3\times 5^{2n+1}\times 2^{3n+1}\right)+17\times 3\times 5^{2n+1}$$

$8\left(3\times 5^{2n+1}\times 2^{3n+1}\right)$ يقبل القسمة على 17 حسب معطيات الترجع

$17\times 3\times 5^{2n+1}$ كتب على شكل 17k

ومنه: $8\left(3\times 5^{2n+1}\times 2^{3n+1}\right)+17\times 3\times 5^{2n+1}$ يقبل القسمة على 17

خلاصة : $3\times 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ يقبل القسمة على 17.

2. أ- نبين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : f(x) = f(2^{-n}x)$

نستدل على ذلك بالترجع .

* نتحقق أن العلاقة صحيحة ل. $n = 0$

لدينا : $f(2^{-n}) = f(2^0 x)$

$= f(x)$

ومنه العلاقة صحيحة ل. $n = 0$

*نفترض أن العلاقة صحيحة الى n أي: $f(x) = f(2^{-n}x)$

*نبين أن العلاقة p صحيحة ل .1

أي أن : $f(x) = f(2^{-n-1}x)$

لدينا: $f(2^{-n-1}x) = f(2 \times 2^{-n-1}x)$

$= f(2^{-n}x)$

(حسب فرضية الترجع) $f(2^{-n-1}x) = f(x)$.

ومنه العبارة صحيحة ل .$n+1$

خلاصة : العلاقة p صحيحة.

2. ب- نستنتج أن $(\forall p \in \mathbb{Z}) \quad f(x) = f(2^p x)$

لدينا $p \in \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \mathbb{Z}^+$

*حالة (1) : $p \in \mathbb{Z}^+$

يعني : $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(2^{-p}(2^p x))$

$\Leftrightarrow f(x) = f(2^p x)$

$(p \in \mathbb{Z}^+)$ و $(p = n)$

ان العلاقة صحيحة ل $p \in \mathbb{Z}^+$

*حالة (2) : $p \in \mathbb{Z}^-$

يعني : $f(2^p x) = f(2^{-p}x)$

$= f(2^{-p}x)$

$= f(x)$

$(-p \in \mathbb{Z}^+)$ و $(-p = n)$

ومنه $\forall p \in \mathbb{Z}^- : f(x) = f(2^p x)$

خلاصة : اذا حسب فصل الحالات فان : $\forall p \in \mathbb{Z}: \quad f(x) = f(2^p x)$

3. - أ – نبين أن : $U_{k+1} - U_k = k(k!)$

لدينا : $U_k = k!$

$$U_{k+1} - U_k = k(k!) = (k+1)! - k! = k!(k+1-1) = k(k!)$$

خلاصة : $U_{k+1} - U_k = k(k!)$

ب-ج- نكتب S_n باستعمال U_k ثم استنتج قيمتها :

$$S_n = 1.1! \quad + 2.2! \quad + 3.3! \quad + \cdots\cdots + (n-1)n \quad + \quad n.n!$$
$$= (\cancel{U_2} - U_1) + (\cancel{U_3} - \cancel{U_2}) + (\cancel{U_4} - \cancel{U_3}) + \cdots + (\cancel{U_n} - \cancel{U_{n-1}}) + (U_{n+1} - \cancel{U_n})$$
$$= -U_1 + U_{n+1}$$
$$= -1 + (k+1)!$$

د- أكتب المجموع S_n مستعملا $\sum$ ثم أحسب مستعملا فقط $\sum$:

لدينا :

$$S_n = \sum_{j=1}^{j=n} j(j!)$$
$$= \sum_{j=1}^{j=n} (U_{j+1} - U_j)$$
$$= \sum_{j=1}^{j=n} U_{j+1} - \sum_{j=1}^{j=n} U_j$$
$$= \sum_{i=2}^{i=n+1} U_{j+1} - \sum_{j=1}^{j=n} U_j \left(i = j+1 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} j=1 \Rightarrow i=2 \\ j=n \Rightarrow i=n+1 \end{array} \right. \right)$$
$$= \left(U_{n+1} + \sum_{i=2}^{i=n} U_i \right) - \left(U_1 + \sum_{j=2}^{j=n} U_j \right)$$
$$= U_{n+1} - U_1 + \sum_{i=2}^{i=n} U_i - \sum_{i=2}^{i=n} U_i$$
$$= U_{n+1} - U_1$$
$$= (n+1)! - 1$$

و بالتالي : $S_n = (n+1)! - 1$

خلاصة : $S_n = (n+1)! - 1$

و شكرا .

من طرف التلميذ : ياسين المسعودي.

ثانوية عمر بن عبد العزيز 2014-2015 | أولى علوم رياضية 1 .

التاريخ : 23/11/2014 09:54