

التمرين رقم 1

حدد نفي وقيمة الحقيقة لكل من العبارات التالية :

- (1) $(\exists x \in \mathbb{R}) \quad x^2 < x$ (2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad n^2 \geq n$ (3) $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad x > \frac{1}{x}$
- (4) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}) \quad x + y - 2 = 0$ (5) $(\exists y \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad x + y - 2 = 0$
- (6) $(\exists y \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) \quad xy + 2y + x + 2 = 0$ (7) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sqrt{n(n+1)+1} \in \mathbb{N}$

التمرين رقم 2

باستعمال برهان بالمضاد للعكس بين ما يلي :

- (1) $(\forall x > 1)(\forall y > 1) : (x \neq y \Rightarrow x^2 - 2x \neq y^2 - 2y)$
- (2) x, y, z ثلاثة أعداد حقيقية : بين أن $(x > z \text{ أو } y > z) \Rightarrow (x + y > 2z)$
- (3) ليكن a, b عدنان حقيقيان بحيث $b \neq 2a$ بين أن : $b \neq \frac{1}{4}a \Rightarrow \frac{a+2b}{2a-b} \neq \frac{6}{7}$
- (4) $(\forall x \in \mathbb{R}) : (a < x \Rightarrow b < x) \Rightarrow (b \leq a)$
- (5) بين أن لكل عددين x, y من $\mathbb{R}$ لدينا : $\left(xy\sqrt{2} - x - y + \sqrt{2} \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow \left(x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ و } y \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$

التمرين رقم 3

باستعمال بهان بالخلف بين ما يلي :

- (1) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$ (2) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \sqrt{n^2 + 7n + 12} \notin \mathbb{N}$
- (3) ليكن n عددا فرديا و $x_1, x_2, \dots, x_n$ عناصر مختلفة من $E = \{1, 2, \dots, n\}$ بين أن : $(\exists k \in E) \quad (x_k - k \text{ عدد زوجي})$
- (4) لتكن a, b, c أعداد حقيقية من $\mathbb{R}^{+*}$ وبحيث : $abc > 1$ و $a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ أ. بين أن $a \neq 1$ و $b \neq 1$ و $c \neq 1$
ب. بين أن $a < 1$ أو $b < 1$ أو $c < 1$

التمرين رقم 4

باستعمال برهان بفصل الحالات بين ما يلي :

- (1) أ. إذا كان n لا يقبل القسمة على 3 فإن العدد $n^2 - 1$ يقبل القسمة على 3
ب. استنتج أن العدد $ab(a^2 - b^2)$ يقبل القسمة على 3 لكل عددين a, b من $\mathbb{N}$
- (2) $E\left(\frac{x}{2}\right) + E\left(\frac{x+1}{2}\right) = E(x)$ (3) $E(x) + E\left(x + \frac{1}{2}\right) = E(2x)$

التمرين رقم 5

- بين بالترجع ما يلي : (1) 9 يقسم $4^n + 6n - 1$ (2) $4n^3 - n$ يقبل القسمة على 3
- (3) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 7/3^{2n+3} + 2^{n+3}$ (4) $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 11/9^{n+1} + 2^{6n+1}$
- (5) $(\forall n \geq 1)(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \quad (1+x)^n \geq 1+nx$ (6) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$
- (7) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$ (8) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=n} k 2^k = 2 + (n-1)2^{n+1}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{p=1}^{p=n} \frac{p^2}{(2p+1)(2p-1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)} \quad (10) \quad (\forall a \neq 1) (\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=0}^{k=n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad (9)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \quad (12) \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*) \sum_{k=1}^{k=n} k(n-k) = \frac{n(n^2-1)}{6} \quad (11)$$

التمرين رقم 6

ليكن a, b عددان من المجال $[0, 1]$. نضع $A = ab$ ، $B = a(1-b) + b(1-a)$ ، و $C = (1-a)(1-b)$

$$(1) \text{ بين أن } B \geq 2(\sqrt{ab} - ab)$$

$$(2) \text{ نفترض أن } A < \frac{4}{9} \text{ و } B < \frac{4}{9} \text{ و } C < \frac{4}{9}$$

$$\text{أ. بين أن } ab - \sqrt{ab} + \frac{2}{9} > 0 \text{ واستنتج أن } ab < \frac{1}{9}$$

$$\text{ب. بين أن : } C < \frac{4}{9} \Rightarrow a + b - ab > \frac{5}{9}$$

$$\text{ج. استنتج أن } B \geq \frac{4}{9} \text{ . الخلاصة}$$

التمرين رقم 7

لكل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي 2 نضع $P_n = \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

$$(1) \text{ بين أن : } P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^{k=n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1} \quad (\forall n \geq 2)$$

$$(2) \text{ أ. تحقق أن : } (k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1$$

$$\text{ب. استنتج أن : } P_n = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} \quad (\forall n \geq 2)$$

التمرين رقم 8

ليكن a من المجال $]0, 1[$. 1 بين أن : $a^p \geq a^q \Rightarrow p \leq q \quad (\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2)$

$$(2) \text{ أ. بين أن : } a + a^2 + \dots + a^n = a \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

$$\text{ب. استنتج أن : } 1 - a^{n+1} \geq n(1-a)a^n$$

$$(3) \text{ خذ } a = 1 - \frac{1}{n^2} \text{ ثم بين أن } \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq 1$$

التمرين رقم 9

$$(1) \text{ } (n+1) \text{ مجموع مربعين كاملين } \Rightarrow (2n+1) \text{ مربع كامل } (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$(2) \text{ أ. بين أن : } \frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad (\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2})$$

$$\text{ب. استنتج أن لكل أعداد حقيقية موجبة قطعاً } a, b, c \text{ لدينا : } \frac{a+b}{c^2} + \frac{b+c}{a^2} + \frac{c+a}{b^2} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$(3) \text{ بين أن العبارة : } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m} \in \mathbb{N} \quad (\forall (n, m) \in \mathbb{N}^{*2}) \text{ خاطئة}$$

$$(4) \text{ نضع } A_n = \underbrace{777\dots7}_{n \text{ fois}} \text{ بين أن } A_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$$

$$(5) \text{ أ. بين أن : } \left(\frac{n^2}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n}{3} \in \mathbb{N}\right) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ ب. بين أن } \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$$