

تمرين رقم 1

أعط نفي كل من العبارات التالية :

$$(1) (\forall x \in \mathbb{R}) : 2x \geq \frac{1}{2}x$$

$$(2) (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 \leq 2x$$

$$(3) (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x - 2y + 3 = 0$$

$$(4) (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x - 2y + 3 = 0$$

$$(5) (\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 - y^2 - 4 \geq 0$$

$$(6) (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 - 3xy + y^2 > 0$$

تمرين رقم 2

حدد قيمة حقيقة كل من العبارات التالية :

$$(1) (\forall x \in \mathbb{R}^+) : x \geq \sqrt{x}$$

$$(2) (\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + \frac{2}{x^2} > 3$$

$$(3) (\exists x \in \mathbb{R}) : x \leq 2x$$

$$(4) (\exists x \in \mathbb{R}) : \frac{2x}{1+x^2} > 1$$

$$(5) (\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z}) : a \leq b \Rightarrow a^2 \leq b^2$$

$$(6) (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : 2x + y - 5 = 0$$

$$(7) (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : 2x + y - 5 = 0$$

$$(8) (\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}^+) : a > b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1$$

$$(9) (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : 2xy - x - y + \frac{1}{2} = 0$$

تمرين رقم 3

1) نعتبر العبارة :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) : x^2 + 4x = y^2 + 4y \Rightarrow x = y$$

حدد نفي العبارة ثم بين أنها صحيحة

2) نعتبر العبارة :

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a \neq b \Rightarrow \frac{a-2}{a+1} \neq \frac{b-2}{b+1}$$

حدد الاستلزام المضاد للعكس ثم قيمة حقيقة العبارة

2) نعتبر العبارة :

$$(\forall a \in \mathbb{Z})(\forall b \in \mathbb{Z}) : |1+ab| = |a+b| \Rightarrow |a|=1 \text{ أو } |b|=1$$

حدد نفي العبارة ثم بين أنها صحيحة

تمرين رقم 4

1) ليكن a و b من $\mathbb{R}^+$ وبحيث $a+b=0$

بين بالخلف أن $a=0$ و $b=0$

2) تطبيق : حل في المعادلتين

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{y+2} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

2) ليكن a و b و c أعداد حقيقية موجبة وبحيث $\geq c$

ab

بين أن $a < \sqrt{c}$ أو $b < \sqrt{c}$ (بالخلف)

3) ليكن x و y و z أعداد حقيقية

بين أن $x^2 + xy + y^2 \geq 0$ (برهان بفصل الحالات)

4) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq |x|$. بفصل الحالات

5) ليكن x و y عددين حقيقيين و c موجب قطعاً وبحيث

$$|xy| \leq 2c^2 \text{ بين أن } |x-y| \leq 2c \text{ و } |x+y| \leq 2c$$

تمرين رقم 5

بين بالترجع ما يلي :

$$(1) (\forall n \in \mathbb{N}^*) 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) (1 \times 2) + (2 \times 3) + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(3) (\forall n \in \mathbb{N}) 3^n \geq 1 + 2n$$

$$(4) (\forall n \in \mathbb{N}) (1+a)^n \geq 1 + na \text{ حيث } a \text{ موجب قطعاً}$$

$$(5) (\forall n \in \mathbb{N}^*) 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$a \neq 1 \text{ و } (\forall n \in \mathbb{N}^*) 1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

$$(7) (\forall n \in \mathbb{N}) 2^{n+1} \geq n(n+1)$$

$$(8) 3^{2n+1} + 2^2 \text{ يقبل القسمة على } 7 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$(9) 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \text{ يقبل القسمة على } 17 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$(10) 4^n + 6n - 1 \text{ يقسم } 9 \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

في الماتن