

## المنطق La logique

### محتوى البرنامج :

- \* العبارات ؛ العمليات على العبارات ؛ الدوال العبارية ؛ المكممات .
- \* الاستدلالات الرياضية : الاستدلال بالخلف ؛ الاستدلال بمضاد العكس ؛ الاستدلال بفصل الحالات ؛ الاستدلال بالتكافؤ ؛ الاستدلال بالترجع .

### القدرات المنتظرة :

- \* التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدرستة .
- \* التمكن من صياغة براهين واستدلالات رياضية واضحة وسليمة منطقيا .

### توجيهات تربوية :

- \* ينبغي تقريب العبارات والقوانين المنطقية وطرق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للתלמיד ومن وضعيات رياضية سبق له التعامل معها .
- \* ينبغي تجنب البناء النظري والإفراط في استعمال جداول الحقيقة .
- \* إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه ، كلما ستحت الفرصة بذلك ، ب مختلف فصول المقرر اللاحقة .

الغلاف الزمني لإنجاز الدرس : 8 ساعات

### I - العبارات - العمليات على العبارات :

#### 1) العبارات :

##### نشاط تمهيدي :

نشاط 1 ص 14 من الكتاب المدرسي (في رحاب الرياضيات السنة الأولى).  
1 ) انقل الجدول التالي في دفترك ثم ضع العلامة " X " في الخانة المناسبة .

خطئ	صحيح	
		كل عدد زوجي قابل للقسمة على 4
		مجموع عددين فردبين هو عدد زوجي
✓	عدد لا جبري	الإزاحة تحافظ على المسافات
		الدالة $x^2 \rightarrow x$ حيث $x \in IR$
		جميع المستقيمات المتعمدة في الفضاء متقطعة

2 ) هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد ؟  
الجمل الرياضية الواردة في الجدول هي نصوص رياضية سليمة لغويًا وتحمل معنى ، قد يكون إما صحيحا وإما خطئا ،  
تسمى عبارات رياضية .

إذا كانت عبارة صحيحة نقول إن قيمة حققتها صحيحة وإذا كانت خاطئة نقول إن قيمة حققتها خاطئة .

##### تعريف :

العبارة في المنطق هي كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا وإما خطئا ( ولا يمكن أن يكون صحيحا وخطئا في آن واحد ) . نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز : p أو q أو r ...

##### ملاحظة :

إذا كانت عبارة p صحيحة فإننا نقول : لدينا p .  
مثال : لدينا  $\sqrt{2}$  عدد لا جسري .

##### 2) العمليات على العبارات :

##### 1 - نفي عبارة :

أنشطة تمهيدية : 1 ) نشاط 4 ص 15 من الكتاب المدرسي .

2 ) يقوم أحد التلاميذ إلى السبورة ويكتب مجموعة من العبارات الرياضية المتنوعة وما يكتبه التلميذ على السبورة ينفيه زملاؤه .

تعريف :

نفي عبارة  $p$  هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت  $p$  خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت  $p$  صحيحة ، ونرمز لها بالرمز  $\neg p$  أو بالرمز  $\bar{p}$  .

ملاحظة :

\* يمكن أن نمثل نفي العبارة  $p$  بالجدول التالي الذي يسمى جدول حقيقة  $\bar{p}$  .

$p$	$\bar{p}$
1	0
0	1

( table de vérité de  $\bar{p}$  ) .

\* الرمز 1 يعني أن العبارة  $p$  صحيحة .

\* الرمز 0 يعني أن العبارة  $p$  خاطئة .

2 - عطف عبارتين :

تعريف :

عطف عبارتين  $p$  و  $q$  هو العبارة التي نرمز لها بالرمز  $(p \wedge q)$  أو بالرمز  $(q \wedge p)$  و تكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان  $p$  و  $q$  صحيحتين معاً .

تمرين :

- أعط جدول حقيقة  $(p \wedge q)$  .

- تحقق أن  $(p \wedge q) \wedge r$  و  $p \wedge (q \wedge r)$  لهما نفس جدول الحقيقة .

3 - فصل عبارتين :

تعريف :

فصل عبارتين  $p$  و  $q$  هو العبارة التي نرمز لها بالرمز  $(q \vee p)$  أو بالرمز  $(p \vee q)$  و تكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتين  $p$  و  $q$  على الأقل صحيحة .

تمرين :

- أعط جدول حقيقة  $(p \vee q)$  .

- تتحقق أن  $(p \vee q) \vee r$  و  $p \vee (q \vee r)$  لهما نفس جدول الحقيقة .

4 - استلزم عبارتين :

نشاط تمهدى :

نشاط 5 ص 16 من الكتاب المدرسي .

ليكن  $ABC$  مثلثا قائم الزاوية في  $A$  وغير متساوي الساقين .

نعتبر العبارات التالية :

"  $p$  :  $ABC$  مثلثا قائم الزاوية في  $A$  "

"  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  " :  $q$

: "  $r$  :  $ABC$  مثلثا متساوي الساقين وقائم الزاوية في  $A$  " .

"  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$  " :  $s$

لدينا : " إذا كان  $ABC$  مثلثا قائم الزاوية في  $A$  فإن  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  " عبارة صحيحة .

عبر عن ذلك بالقول : إذا كانت العبارة  $p$  صحيحة فإن العبارة  $q$  صحيحة .

ونقول أيضا : العبارة  $p$  تستلزم العبارة  $q$

ونكتب :  $p \Rightarrow q$  .

هل الاستلزمات التالية صحيحة؟ :  $s \Rightarrow p$  ;  $p \Rightarrow r$  ;  $p \Rightarrow s$  ;  $q \Rightarrow p$

تعريف :

التزام عبارتين  $p$  و  $q$  هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت  $p$  صحيحة و  $q$  خاطئة ونرمز له بالرمز  $p \Rightarrow q$  .  
ويقرأ :  $p$  تستلزم  $q$  ( أو إذا كانت  $p$  فإن  $q$  ) .

تمرين :

- أعط جدول حقيقة  $( p \Rightarrow q )$  .
- هل العبارتان  $\Rightarrow q$  و  $\Rightarrow p$  لهما نفس جدول الحقيقة ؟
- هل العبارتين  $( p \Rightarrow r )$  و  $( q \Rightarrow r )$  لهما نفس جدول الحقيقة ؟

ملاحظات :

- 1) من خلال جدول حقيقة  $\Rightarrow p$  نستنتج أن :
  - \* إذا علمنا أن  $\Rightarrow q$  عبارة صحيحة وعلمنا أن  $p$  عبارة صحيحة فإننا نستنتج أن  $q$  عبارة صحيحة .
  - \* للبرهنة على صحة الاستلزم  $\Rightarrow q$  يكفي أن نفترض أن  $p$  عبارة صحيحة ونبين أن  $q$  عبارة صحيحة .
- 2) العبارة  $\Rightarrow q$  تسمى الاستلزم العكسي للاستلزم  $\Rightarrow p$  .
- 3) العبارة  $\Rightarrow q$  تقرأ أيضاً : " لكي تكون  $q$  يكفي أن تكون  $p$  .

تمرين 1 : ( تمرين 1 ص 29 من الكتاب المدرسي )

## 5 - تكافؤ عبارتين :

نشاط تمهيدي :

في النشاط السابق لدينا : "  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  يكافيء  $" BC^2 = AB^2 + AC^2 "$  نقول إن العبارة  $p$  تكافئ العبارة  $q$  ونكتب :  $p \Leftrightarrow q$  .

تعريف :

تكافؤ عبارتين  $p$  و  $q$  هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت  $p$  و  $q$  صحيحتين في آن واحد ونرمز له بالرمز  $\Leftrightarrow p$  ، ويقرأ :  $p$  تكافئ  $q$  ؛ أو  $p$  إذا وفقط إذا كان  $q$  ؛ أو "  $p$  شرط لازم وكاف لكي تكون  $q$  " .

تمرين 2 :

حدد العبارات الصحيحة من بين العبارات التالية :

- \*\* ليكن  $n$  من  $IN$  : ( زوجي )  $\Leftrightarrow ( n + 1$  فردي )
- \*\* ليكن  $x$  من  $IR$  : (  $x^2 = 1$  )  $\Leftrightarrow ( x = 1 )$
- \*\* ليكن  $x$  من  $IR$  : (  $\frac{1}{x} < 0$  )  $\Leftrightarrow ( x > 0 )$

\*\* لتكن  $A$  و  $B$  و  $I$  ثلث نقط من المستوى . (  $I$  منتصف  $[AB]$  )

## II - الدوال العارية - المكممات :

### 1) الدوال العارية :

نشاط تمهيدي :

نعتبر النص الرياضي :  $x + 1 \geq 0$  حيث  $x \in IR$  .

• من أجل  $x = 1$  لدينا :  $1 + 1 \geq 0$  عبارة صحيحة .

• من أجل  $x = -2$  لدينا :  $-2 + 1 \geq 0$  عبارة خاطئة .

كلما عوضنا  $x$  بقيمة محددة فإننا نحصل على عبارة إما صحيحة وإما خاطئة .

النص الرياضي :  $x + 1 \geq 0$  حيث  $x \in IR$  يسمى دالة عارية .

تعريف :

الدالة العارية هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ( أو أكثر ) ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير ( أو المتغيرات ) بعنصر محدد من هذه المجموعة .

اليمني محمد

# هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

ترميز : حسب عدد المتغيرات نرمز للدالة العبارية بالرمز :  $(x)$  أو  $P(x)$  أو  $A$  أو ...

اصطلاح :

إذا كانت الدالة العبارية  $(x)$  تتحقق عبارة صحيحة من أجل العنصر المحدد  $a$  فإننا نقول إن  $a$  تحقق الدالة العبارية  $(x)$  أو  $A(x)$  تتحقق من أجل العنصر  $a$ .

2) المكملات :

أ - المكمل الكوني :

لتكن  $(x)$  دالة عبارية للمتغير  $x$  من مجموعة  $E$  غير فارغة.

انطلاقاً من  $(x)$  ننشئ العبارة :  $\forall x \in E : P(x)$  التي تكون صحيحة إذا كانت جميع عناصر  $E$  تحقق  $(x)$ .  
\* الرمز  $\forall$  يسمى المكمل الكوني.

\* العبارة :  $\forall x \in E : P(x)$  ؛ أو لكل  $x$  من  $E$  لدينا  $(x)$ .  
أمثلة :

$$\forall x \succ 0 : x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \bullet$$

$$\forall x \in IR : x^2 - 1 = 0 \quad \bullet$$

$$\forall x \in IR : x^2 + 1 \succ 0 \quad \bullet$$

ب - المكمل الوجودي :

لتكن  $(x)$  دالة عبارية للمتغير  $x$  من مجموعة  $E$  غير فارغة.

انطلاقاً من  $(x)$  ننشئ العبارة :  $\exists x \in E : P(x)$  التي تكون صحيحة إذا كان يوجد على الأقل عنصر من  $E$  يحقق  $(x)$ .

\* الرمز  $\exists$  يسمى المكمل الوجودي.

\* العبارة :  $\exists x \in E : P(x)$  : يوجد على الأقل عنصر  $x$  من  $E$  بحيث لدينا  $(x)$ .

أمثلة :

$$\exists x \in Q : x^2 = 2 \quad \bullet$$

$$\exists x \in IR : x^2 - 1 = 0 \quad \bullet$$

$$\exists x \in IR : x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \bullet$$

ملاحظة :

إذا كان يوجد عنصر وحيد يحقق  $(x)$  فإننا نكتب :  $\exists! x \in E : P(x)$  وهذه العبارة تقرأ : يوجد عنصر وحيد  $x$  من  $E$  بحيث لدينا  $(x)$ .

مثال :  $\exists! n \in IN : n^2 = 9$  عبارة صحيحة.

3) عبارة بعده مكملات :

• العبارتان : " $(\forall y \in IR) ; x^2 + y^2 \geq xy$ " و " $(\forall x \in IR) ; x^2 + y^2 \geq xy$ " :  $(\forall y \in IR)$  متكافئتان.

• العبارتان : " $(\exists y \in IR) ; x^2 + y^2 \geq xy$ " و " $(\exists x \in IR) ; x^2 + y^2 \geq xy$ " :  $(\exists y \in IR)$  متكافئتان.

• العبارة :  $x + y = 5$  عبارة صحيحة (نأخذ :  $x = 5 - y$ ). (  $x \in IR$ ;  $y \in IR$  ).

• العبارة :  $x + y = 5$  خاطئة ( لأن  $x \in IR$ ;  $y \in IR$  ) :  $x + y = -x + 7$  مثلاً لا يتحقق العبارة.

بصفة عامة :

إذا كانت المكملات من نفس الطبيعة فإن ترتيبها ليست له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكملة.

إذا كانت المكملات من طبيعتين مختلفتين فإن ترتيبها له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكملة.

4) نفي عبارة مكملة :

• نفي العبارة :  $\forall x \in E : P(x)$  هو العبارة :  $\exists x \in E : \overline{P(x)}$ .

• نفي العبارة :  $\exists x \in E : P(x)$  هو العبارة :  $\forall x \in E : \overline{P(x)}$ .

أمثلة:

- نفي العبارة الصحيحة :  $\exists x \in IR : x^2 \geq 0$  هو العبارة الخاطئة .
- نفي العبارة الخاطئة :  $\forall x \in IR : x^2 + 1 = 0$  هو العبارة الصحيحة .
- نفي العبارة الخاطئة :  $\forall x \in IR : x \leq 2$  هو العبارة الصحيحة .

تعريف 3:

انظر لائحة التمارين

تعريف 4:

انظر لائحة التمارين

تعريف 5:

انظر لائحة التمارين

## III - القوانيں المنطقية - الاستدلالات الرياضية :

1) القوانيں المنطقية :

تعريف :

كل عبارة مكونة من عدة عبارات  $p$  و  $q$  و  $r$  و ... مرتبطة بينها بعمليات منطقية وتكون صحيحة مهما كانت العبارات  $p$  و  $q$  و  $r$  و ... تسمى قانوناً منطقياً .

أمثلة:

1) قانون منطقى :  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$  و  $(p \Rightarrow q)$  .

2) قانون موركان :  $(\neg p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow p)$  .

3) الاستدلالات الرياضية :

4) الاستدلال بالاستلزم المضاد للعكس :

تعريف :

العبارة  $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$  تسمى الاستلزم المضاد للعكس للاستلزم  $p \Rightarrow q$

خاصية: العبارة :  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$  قانون منطقي .

نتيجة:

إذا كان في بعض الأحيان يصعب البرهان مباشرة على صحة الاستلزم  $q \Rightarrow p$  فإنه يمكن أن نبرهن على صحة الاستلزم المضاد للعكس  $\neg p \Rightarrow \neg q$  ثم نستنتج أن :  $q \Rightarrow p$  . هذا النوع من الاستلزم يسمى الاستلزم المضاد للعكس .

تعريف تطبيقي:

بين أن :  $(\forall(x; y) \in IR^2) : (xy \neq 1 \text{ و } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}$

من أجل ذلك نبين أن :  $(\forall(x; y) \in IR^2) : \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{y}{y^2 + y + 1} \Rightarrow (xy = 1 \text{ أو } x = y)$

تعريف 6:

انظر لائحة التمارين.

2 - الاستدلال بالتكافؤات المتتالية:

خاصية: العبارة :  $(p \Leftrightarrow r) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r))$  قانون منطقي

**نتيجة:** نستنتج من هذا القانون أن : إذا كان  $q \Leftrightarrow r$  صحيح و  $p \Leftrightarrow q$  صحيح فإن  $p \Leftrightarrow r$  صحيح .

**تمرين تطبيقي :**

يبين أن :  $(\forall(x; y) \in IR^2) : \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$

**تمرين 7 :**

تمرين 15 ص 30 من الكتاب المدرسي

**3 - الاستدلال بالخلف :**

## Raisonnement Par L'Absurde

**خاصية:** العبارة :  $p \Rightarrow q \wedge \neg p \Rightarrow \neg q \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$  قانون منطقي .

**نتيجة:** من هذا القانون نستنتج أنه إذا كان  $\neg p \Rightarrow q$  صحيحًا و  $\neg p \Rightarrow \neg q$  صحيحًا فإن العبارة  $p$  صحيحة .

**عمليا:** نفترض أن  $\neg p$  صحيحة ونبين أن  $\neg p$  تستلزم  $\neg q$  حيث أن  $q$  عبارة صحيحة .

ويكون لدينا :  $(\neg q \wedge \neg p) \Rightarrow q$  عبارة صحيحة وهذا تناقض .

**تمرين تطبيقي :**

يبين أن :  $n \in IN^* ; \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin Q$

**تمرين 8 :**

1 ) (P) و (Q) مستويان يتقاطعان وفق مستقيم (D) . A و B نقطتان من (P) حيث (AB) يقطع (D) في نقطة واحدة .

C . لتكن E نقطة من (Q) لا تنتمي إلى (D) .

يبين أن المستويين (ABE) و (Q) غير منطبقين .

2 ) تمرين 29 ص 31 من الكتاب المدرسي .

3 ) أ - بين أن :  $x$  زوجي  $\Leftrightarrow x^2$  زوجي .

ب - استنتاج أن :  $\sqrt{2} \notin Q$  .

**4 - الاستدلال بفصل الحالات :**

**خاصية:** العبارة :  $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q \Rightarrow r)$  قانون منطقي .

**نتيجة:** من هذا القانون نستنتج أنه إذا كانت  $(q \vee p)$  عبارة صحيحة فإنه للبرهان على صحة العبارة  $r$  نبين أن الاستلزمات  $p \Rightarrow r$  و  $q \Rightarrow r$  صحيحان ثم نستنتج أن العبارة  $r$  صحيحة .

**تمرين تطبيقي :**

يبين أن العدد  $(n^2 - 1)$  مضاعف ل 3 لكل n من IN .

**تمرين 9 :**

1 ) تمرين 7 ص 30 من الكتاب المدرسي

2 ) تمرين 8 ص 30 من الكتاب المدرسي

3 ) تمرين 9 ص 30 من الكتاب المدرسي

**5 - الاستدلال بالترجم:**

**خاصية:**

لتكن  $P(n)$  خاصية لمتغير n صحيح طبيعي .

إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي  $n_0$  بحيث تكون العبارة  $(P(n_0))$  صحيحة ؛ وإذا كان  $\forall n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$  عبارة صحيحة ؛ فإن : "  $\forall n \geq n_0 : P(n)$  " عبارة صحيحة .

**تمرين تطبيقي :**

يبين بالترجم أن :  $\forall n \geq 4 : 2^n \geq n^2$  .

**تمرين 10 :** انظر لائحة التمارين