

المنطق La logique

محتوى البرنامج :

* العبارات ؛ العمليات على العبارات ؛ الدوال العبارية ؛ الكميات .
* الاستدلالات الرياضية : الاستدلال بالخلف ؛ الاستدلال بمضاد العكس ؛ الاستدلال بفصل الحالات ؛ الاستدلال بالتكافؤ ؛ الاستدلال بالترجع .

القدرات المنتظرة :

* التمكن من استعمال الاستدلال المناسب حسب الوضعية المدروسة .
* التمكن من صياغة براهين واستدلالات رياضية واضحة وسليمة منطقيا .

توجيهات تربوية :

* ينبغي تقريب العبارات والقوانين المنطقية وطرق الاستدلال انطلاقا من أنشطة متنوعة ومختلفة مستقاة من الرصيد المعرفي للتلميذ ومن وضعيات رياضية سبق له التعامل معها .
* ينبغي تجنب البناء النظري والإفراط في استعمال جداول الحقيقة .
* إن درس المنطق لا ينتهي بانتهاء هذا الفصل بل ينبغي استثمار نتائجه ، كلما سنحت الفرصة بذلك ، بمختلف فصول المقرر اللاحقة .

الغلاف الزمني لإنجاز الدرس : 8 ساعات

I - العبارات - العمليات على العبارات :

1 (العبارات :

نشاط تمهيدي :

نشاط 1 ص 14 من الكتاب المدرسي (في رحاب الرياضيات السنة الأولى) .
1 (انقل الجدول التالي في دفترك ثم ضع العلامة " X " في الخانة المناسبة .

صحيح	خاطئ

2 (هل توجد من بين الجمل الواردة في الجدول أعلاه جمل صحيحة و خاطئة في آن واحد ؟

الجمل الرياضية الواردة في الجدول هي نصوص رياضية سليمة لغويا وتحمل معنى ، قد يكون إما صحيحا وإما خاطئا ، تسمى عبارات رياضية .

إذا كانت عبارة صحيحة نقول إن قيمة حقيقتها صحيحة وإذا كانت خاطئة نقول إن قيمة حقيقتها خاطئة .

تعريف :

العبارة في المنطق هي كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا وإما خاطئا (ولا يمكن أن يكون صحيحا وخاطئا في آن واحد) . نرمز عادة لعبارة بأحد الرموز : p أو q أو r ...

ملاحظة :

إذا كانت عبارة p صحيحة فإننا نقول : لدينا p .

مثال : لدينا $\sqrt{2}$ عدد لا جذري .

2 (العمليات على العبارات :

1 - نفى عبارة :

أنشطة تمهيدية : 1 (نشاط 4 ص 15 من الكتاب المدرسي .

2) يقوم أحد التلاميذ إلى السبورة ويكتب مجموعة من العبارات الرياضية المتنوعة وما يكتبه التلميذ على السبورة ينفذه زملاؤه .

تعريف :

نفي عبارة p هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت p خاطئة وتكون خاطئة إذا كانت p صحيحة ، ونرمز لها بالرمز \bar{p} أو بالرمز $\neg p$.

ملاحظة :

p	\bar{p}
1	0
0	1

* يمكن أن نمثل نفي العبارة p بالجدول التالي الذي يسمى جدول حقيقة \bar{p} .
(table de vérité de \bar{p})
* الرمز 1 يعني أن العبارة p صحيحة .
* الرمز 0 يعني أن العبارة p خاطئة .

2 - عطف عبارتين :

تعريف :

عطف عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز $(p \wedge q)$ أو بالرمز $(p \wedge q)$ وتكون صحيحة فقط إذا كانت العبارتان p و q صحيحتين معا .

تمرين :

- أعط جدول حقيقة $(p \wedge q)$.
- تحقق أن $p \wedge (q \wedge r)$ و $(p \wedge q) \wedge r$ لهما نفس جدول الحقيقة .

3 - فصل عبارتين :

تعريف :

فصل عبارتين p و q هو العبارة التي نرمز لها بالرمز $(p \vee q)$ أو بالرمز $(p \vee q)$ وتكون صحيحة إذا كانت إحدى العبارتين p و q على الأقل صحيحة .

تمرين :

- أعط جدول حقيقة $(p \vee q)$.
- تحقق أن $p \vee (q \vee r)$ و $(p \vee q) \vee r$ لهما نفس جدول الحقيقة .

4 - استلزام عبارتين :

نشاط تمهيدى :

نشاط 5 ص 16 من الكتاب المدرسي .
ليكن ABC مثلثا قائم الزاوية في A وغير متساوي الساقين .
نعتبر العبارات التالية :
 p : " ABC مثلثا قائم الزاوية في A "
 q : " $BC^2 = AB^2 + AC^2$ "
 r : " ABC مثلثا متساوي الساقين وقائم الزاوية في A "
 s : " $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ "
لدينا : " إذا كان ABC مثلثا قائم الزاوية في A فإن $BC^2 = AB^2 + AC^2$ " عبارة صحيحة .
بعبارة عن ذلك بالقول : إذا كانت العبارة p صحيحة فإن العبارة q صحيحة .
ونقول أيضا : العبارة p تستلزم العبارة q
ونكتب : $p \Rightarrow q$.
هل الاستلزمات التالية صحيحة ؟ : $q \Rightarrow p$ ؛ $p \Rightarrow s$ ؛ $p \Rightarrow r$ ؛ $s \Rightarrow p$.

تعريف :

التزام عبارتين p و q هو العبارة التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p صحيحة و q خاطئة ونرمز له بالرمز $p \Rightarrow q$ ويقرأ : p تستلزم q (أو إذا كانت p فإن q) .

تمرين :

- أعط جدول حقيقة $(p \Rightarrow q)$.
- هل العبارتان $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ لهما نفس جدول الحقيقة ؟
- هل العبارتين $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ و $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ لهما نفس جدول الحقيقة ؟

ملاحظات :

- (1) من خلال جدول حقيقة $p \Rightarrow q$ نستنتج أن :
* إذا علمنا أن $p \Rightarrow q$ عبارة صحيحة وعلمنا أن p عبارة صحيحة فإننا نستنتج أن q عبارة صحيحة .
* للبرهنة على صحة الاستلزام $p \Rightarrow q$ يكفي أن نفترض أن p عبارة صحيحة ونبين أن q عبارة صحيحة .
 - (2) العبارة $q \Rightarrow p$ تسمى الاستلزام العكسي للاستلزام $p \Rightarrow q$.
 - (3) العبارة $p \Rightarrow q$ تقرأ أيضا : " لكي تكون q يكفي أن تكون p " .
- تمرين 1 :** (تمرين 1 ص 29 من الكتاب المدرسي)

5 - تكافؤ عبارتين :

نشاط تمهيدي :

في النشاط السابق لدينا : " ABC مثلثا قائم الزاوية في A يكافئ $BC^2 = AB^2 + AC^2$ " .
نقول إن العبارة p تكافئ العبارة q ونكتب : $p \Leftrightarrow q$.

تعريف :

تكافؤ عبارتين p و q هو العبارة التي تكون صحيحة إذا كانت p و q صحيحتين في آن واحد أو خاطئتين في آن واحد ونرمز له بالرمز $p \Leftrightarrow q$ ، ويقرأ : p تكافئ q ؛ أو p إذا وفقط إذا كان q ؛ أو " p شرط لازم وكاف لكي تكون q " .

تمرين 2 :

- حدد العبارات الصحيحة من بين العبارات التالية :
- ** ليكن n من \mathbb{N} : $(n \text{ زوجي}) \Leftrightarrow (n+1 \text{ فردي})$
- ** ليكن x من \mathbb{R} : $(x=1) \Leftrightarrow (x^2=1)$
- ** ليكن x من \mathbb{R}^* : $(x>0) \Leftrightarrow (\frac{1}{x}<0)$.
- ** لتكن A و B و I ثلاث نقط من المستوى . $(I \text{ منتصف } [AB]) \Leftrightarrow (\vec{IA} + \vec{BI} = \vec{0})$

II - الدوال العبارية - المكملات :

1 (الدوال العبارية :

نشاط تمهيدي :

- نعتبر النص الرياضي : $x+1 \geq 0$ حيث $x \in \mathbb{R}$.
- من أجل $x=1$ لدينا : $1+1 \geq 0$ عبارة صحيحة .
- من أجل $x=-2$ لدينا : $-2+1 \geq 0$ عبارة خاطئة .
- كلما عوضنا x بقيمة محددة فإننا نحصل على عبارة إما صحيحة وإما خاطئة .
- النص الرياضي : $x+1 \geq 0$ حيث $x \in \mathbb{R}$ يسمى دالة عبارية .

تعريف :

الدالة العبارية هي كل نص رياضي يحتوي على متغير (أو أكثر) ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير (أو المتغيرات) بعنصر محدد من هذه المجموعة .

اليمني محمد

ترميز : حسب عدد المتغيرات نرمز للدالة العبارية بالرمز : $A(x)$ أو $P(x)$ أو $P(x, y)$ أو $P(x, y, z)$ أو ...

اصطلاح :

إذا كانت الدالة العبارية $A(x)$ تصبح عبارة صحيحة من أجل العنصر المحدد a فإننا نقول إن a تحقق الدالة العبارية $A(x)$ أو $A(x)$ تتحقق من أجل العنصر a .

(2) المكملات :

أ - المكمل الكوني :

لتكن $P(x)$ دالة عبارية للمتغير x من مجموعة E غير فارغة .
انطلاقاً من $P(x)$ ننشئ العبارة : $\forall x \in E : P(x)$ التي تكون صحيحة إذا كانت جميع عناصر E تحقق $P(x)$.
* الرمز \forall يسمى المكمل الكوني .
* العبارة : $\forall x \in E : P(x)$ تقرأ : مهما يكن x من E لدينا $P(x)$ ؛ أو لكل x من E لدينا $P(x)$.

أمثلة :

- $\forall x > 0 : x + \frac{1}{x} \geq 2$ عبارة صحيحة

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$ عبارة خاطئة

- $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$ عبارة صحيحة .

ب - المكمل الوجودي :

لتكن $P(x)$ دالة عبارية للمتغير x من مجموعة E غير فارغة .
انطلاقاً من $P(x)$ ننشئ العبارة : $\exists x \in E : P(x)$ التي تكون صحيحة إذا كان يوجد على الأقل عنصر من E يحقق $P(x)$.
* الرمز \exists يسمى المكمل الوجودي .
* العبارة : $\exists x \in E : P(x)$ تقرأ : يوجد على الأقل عنصر x من E بحيث لدينا $P(x)$.

أمثلة :

- $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$ عبارة خاطئة .

- $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0$ عبارة صحيحة .

- $\exists x \in \mathbb{R} : x + \frac{1}{x} \geq 2$ عبارة صحيحة .

ملاحظة :

إذا كان يوجد عنصر وحيد يحقق $P(x)$ فإننا نكتب : $\exists! x \in E : P(x)$ وهذه العبارة تقرأ : يوجد عنصر وحيد x من E بحيث لدينا $P(x)$.

مثال : $\exists! n \in \mathbb{N} : n^2 = 9$ عبارة صحيحة .

(3) عبارة بعدة مكملات :

- العبارتان : $(\forall y \in \mathbb{R}) : (x^2 + y^2 \geq xy : (\forall x \in \mathbb{R}))$ و $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x^2 + y^2 \geq xy : (\forall y \in \mathbb{R}))$ متكافئتان .

- العبارتان : $(\exists y \in \mathbb{R}) : (x^2 + y^2 \geq xy : (\exists x \in \mathbb{R}))$ و $(\exists x \in \mathbb{R}) : (x^2 + y^2 \geq xy : (\exists y \in \mathbb{R}))$ متكافئتان .

- العبارة : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; (\exists y \in \mathbb{R}) : x + y = 5$ عبارة صحيحة (نأخذ : $x = 5 - y$) .

- العبارة : $(\exists x \in \mathbb{R}) ; (\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 5$ خاطئة (لأن $y = -x + 7$ مثلاً لا يحقق العبارة) .

بصفة عامة :

إذا كانت المكملات من نفس الطبيعة فإن ترتيبها ليست له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكملة .
إذا كانت المكملات من طبيعت مختلفة فإن ترتيبها له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكملة .

(4) نفي عبارة مكملية :

- نفي العبارة : $\forall x \in E : P(x)$ هو العبارة : $\exists x \in E : \overline{P(x)}$.

- نفي العبارة : $\exists x \in E : P(x)$ هو العبارة : $\forall x \in E : \overline{P(x)}$.

أمثلة :

- نفي العبارة الصحيحة : $\forall x \in IR : x^2 \geq 0$ هو العبارة الخاطئة : $\exists x \in IR : x^2 < 0$.
- نفي العبارة الخاطئة : $\exists x \in IR : x^2 + 1 = 0$ هو العبارة الصحيحة : $\forall x \in IR : x^2 + 1 \neq 0$.
- نفي العبارة الخاطئة : $\forall x \in IR : x > 2$ هو العبارة الصحيحة : $\exists x \in IR : x \leq 2$.

تمرين 3 :

انظر لائحة التمارين

تمرين 4 :

انظر لائحة التمارين

تمرين 5 :

انظر لائحة التمارين

III - القوانين المنطقية - الاستدلالات الرياضية :

1) القوانين المنطقية :

تعريف :

Les Lois Logiques :

كل عبارة مكونة من عدة عبارات p و q و r ... مرتبطة بينها بعمليات منطقية وتكون صحيحة مهما كانت العبارات p و q و r ... تسما قانونا منطقيا .

أمثلة :

- 1) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \vee q)$ قانون منطقي .
- 2) قانونا موركان :

$$(\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q))$$

و $(\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q))$ هما قانونان منطقيان .

2) الاستدلالات الرياضية :

1 - الاستدلال بالاستلزام المضاد للعكس :

تعريف :

العبارة $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ تسمى الاستلزام المضاد للعكس للاستلزام $p \Rightarrow q$

Les Raisonnements Mathématiques : Raisonnement Par La Contraposée :

خاصية : العبارة : $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$ قانون منطقي .

نتيجة :

إذا كان في بعض الأحيان يصعب البرهان مباشرة على صحة الاستلزام $p \Rightarrow q$ فإنه يمكن أن نبرهن على صحة الاستلزام المضاد للعكس $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ ثم نستنتج أن : $p \Rightarrow q$. هذا النوع من الاستلزام يسمى الاستلزام المضاد للعكس .

تمرين تطبيقي :

$$\text{بين أن : } (\forall (x; y) \in IR^2) : (xy \neq 1 \text{ و } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}$$

$$\text{من أجل ذلك نبين أن : } (xy = 1 \text{ أو } x = y) : \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{y}{y^2 + y + 1} \Rightarrow (\forall (x; y) \in IR^2)$$

تمرين 6 :

انظر لائحة التمارين.

Raisonnement Par Equivalences Successives :

2 - الاستدلال بالتكافؤات المتتالية :

خاصية : العبارة : $(p \Leftrightarrow q \text{ و } q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$ قانون منطقي .

نتيجة : نستنتج من هذا القانون أن : إذا كان $p \Leftrightarrow q$ صحيح و $q \Leftrightarrow r$ صحيح فإن $p \Leftrightarrow r$ صحيح .

تمرين تطبيقي :

بين أن : $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2) : \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = 2 \Leftrightarrow x = y = 0$.

تمرين 7 :

تمرين 15 ص 30 من الكتاب المدرسي

3 - الاستدلال بالخلف :

Raisonnement Par L'Absurde

خاصية : العبارة : $(\bar{p} \Rightarrow q \text{ و } \bar{p} \Rightarrow \bar{q}) \Rightarrow p$ (قانون منطقي .

نتيجة : من هذا القانون نستنتج أنه إذا كان $\bar{p} \Rightarrow q$ صحيحا و $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ صحيحا فإن العبارة p صحيحة .

عمليا : نفترض أن \bar{p} صحيحة ونبين أن \bar{p} تستلزم \bar{q} حيث أن q عبارة صحيحة .

ويكون لدينا : $(q \text{ و } \bar{q})$ عبارة صحيحة وهذا تناقض .

تمرين تطبيقي :

بين أن : $n \in \mathbb{N}^* ; \sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.

تمرين 8 :

(1) (P) و (Q) مستويان يتقاطعان وفق مستقيم (D) . A و B نقطتان من (P) حيث (AB) يقطع (D) في نقطة واحدة C . لتكن E نقطة من (Q) لا تنتمي إلى (D) .

بين أن المستويين (ABE) و (Q) غير منطبقين .

(2) تمرين 29 ص 31 من الكتاب المدرسي .

(3) أ - بين أن : x زوجي $\Leftrightarrow x^2$ زوجي .

ب - استنتج أن : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

4 - الاستدلال بفصل الحالات :

Raisonnement Par Disjonction Des Cas :

خاصية : العبارة : $(p \Rightarrow r \text{ و } q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \text{ أو } q) \Rightarrow r)$ (قانون منطقي .

نتيجة : من هذا القانون نستنتج أنه إذا كانت $(p \text{ أو } q)$ عبارة صحيحة فإنه للبرهان على صحة العبارة r نبين أن

الاستلزامين $q \Rightarrow r$ و $p \Rightarrow r$ صحيحان ثم نستنتج أن العبارة r صحيحة .

تمرين تطبيقي :

بين أن العدد $n(n^2 - 1)$ مضاعف لـ 3 لكل n من \mathbb{N} .

تمرين 9 :

(1) تمرين 7 ص 30 من الكتاب المدرسي

(2) تمرين 8 ص 30 من الكتاب المدرسي

(3) تمرين 9 ص 30 من الكتاب المدرسي

5 - الاستدلال بالترجع :

Raisonnement Par Récurrence :

خاصية :

لتكن $P(n)$ خاصية لمتغير n صحيح طبيعي .

إذا كان يوجد عدد صحيح طبيعي n_0 بحيث تكون العبارة $P(n_0)$ صحيحة ؛ وإذا كان $\forall n \geq n_0 : P(n) \Rightarrow P(n+1)$

عبارة صحيحة ؛ فإن : $\forall n \geq n_0 : P(n)$ " عبارة صحيحة .

تمرين تطبيقي :

بين بالترجع أن : $2^n \geq n^2 : \forall n \geq 4$.

تمرين 10 : انظر لائحة التمارين