درس : مبادئ في المنطق

I. عبارة – دالة عبارية – المكممات:

01. عبارة: PROPOSITION

A. تعريف:

كل نص رياضية يحمل معنى ويكون صحيحا وإما خاطئا (أحدهما فقط) يسمى عبارة ونرمز لها ب p أو q أو r.. صحيحة وإما خاطئة فهو يمثل قيمة حقيقة العبارة. صحيحة نرمز لذلك ب: 1 أو V. خاطئة نرمز لذلك ب :0 أو F .

B. مثال:

من بين الكتابات الآتية. حدد العبارات ثم قيمة حقيقة كل عبارة :

- "3 عدد فردي " . جواب : عبارة V
- " 8=3+6" جواب : عبارة F
- "n من $\mathbb{N}$. $n(n+1)$ يقبل القسمة على 3" جواب : ليست بعبارة
- " $x\in\mathbb{R}/x+3=0$ " جواب : ليست بعبارة
- "مجموع عدد زوجي وعدد فردي هو عدد فردي "

C. جدول قيم حقيقة عبارة .

عبارة ما p قيمة حقيقتها V و إما F.
ونلخص ذلك بالجدول التالي. ويسمى جدول قيم حقيقة عبارة.

p
1
0

02. دالة عبارية: FORMES PROPOSITIONNELLES:

A. تعريف:

كل نص رياضي يحتوي على متغير أو عدة متغيرات تنتمي إلى مجموعة E حيث يصبح عبارة كلما عوضنا المتغير بعنصر من E . يسمى دالة عبارية و نرمز للدالة العبارية ب: A(x)وA P(x) , A(x,y) أو P(x,y),......

B. مثال :

نعتبر الدالتين العبارتين التاليتين :

$A(x,y)$:" لكل x و y من $\mathbb{R}$: $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ "

$P(n)$: " لكل n من $\mathbb{N}^*$: $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ "

03. المكممات: QUANTIFICATEURS:

A. مفردات :

لتكن $A(x)$ دالة عبارية معرفة على مجموعة E .

- العبارة :" يوجد x من E حيث $A(x)$ " . نرمز لها ب: " $\exists x\in E/A(x)$ " . تقرأ يوجد على الأقل x من E تعني : يوجد على الأقل عنصر x من E يحقق $A(x)$. الرمز $\exists$ يسمى المكمم الكوني .
- العبارة :" لكل x من E حيث $A(x)$ " . نرمز لها ب: " $\forall x\in E/A(x)$ " . تقرأ مهما كان x من E لدينا $A(x)$ تعني: أن جميع عناصر x من E تحقق $A(x)$. الرمز $\forall$ يسمى المكمم الكوني.

B. ملاحظات :

- نفي المكمم $\forall$ هو المكمم $\exists$.
- نفي المكمم $\exists$ هو المكمم $\forall$.

- كل دالة عبارية تحتوي على عدة مكممات . تغير ترتيب المكممات
أ- ليس له أهمية و لا يغير المعنى إذا كانت من نفس النوع.
ب - له أهمية و يغير المعنى إذا لم تكن من نفس النوع.

توضيح لذلك :

مثال 1 : $\forall x \in \mathbb{Z} , \exists y \in \mathbb{Z} , y > x$ هي صحيحة (ليكن x من $\mathbb{Z}$ يوجد y من $\mathbb{Z}$) يمكن أن نأخذ $y = x + 1$) حيث : $y > x$

ولكن العبارة : $\exists y \in \mathbb{Z} , \forall x \in \mathbb{Z} , y > x$ غير صحيحة لأن العنصر y الذي يوجد سيكون لجميع عناصر x من $\mathbb{Z}$ وهذا غير ممكن للعنصر $x = y$.

مثال 2 :

نعتبر : $E = \{1,3,5\}$ و $F = \{2,4,6\}$.

العبارة $\forall x \in E , \exists y \in F , y = x + 1$. و هي تقرئ " لكل عنصر x من E ؛ يمكن أن نجد عنصر y من F حيث $y = x + 1$.

ويمكن تحقق من ذلك بسهولة .

ولكن العبارة : $\exists y \in F , \forall x \in E , y = x + 1$. و هي تقرئ " يوجد عنصر y من F يحقق لكل عنصر x من E العلاقة $y = x + 1$

و هذا غير ممكن لأي قيمة تعطى ل y .

- نكتب ما يلي: (نفس الشيء للرمز $\exists$)

- $\forall x \in E, \forall y \in E$ ب $\forall x, y \in E$ أو ب: $\forall (x,y) \in E \times F$
- $\forall x \in E, \forall x \in E$ ب $\forall x, y \in E$ أو ب $\forall (x,y) \in E \times F$.
- أما الكتابة : $\exists! x \in E$ تقرأ : يوجد عنصر وحيد x من E .

II. العمليات على العبارات : (الروابط المنطقية) connecteurs

01. نفي عبارة :

A. تعريف:

نفي عبارة p هي العبارة q حيث قيمة حقيقتها عكس قيمة حقيقة p و نرمز لها ب: $q = \bar{p}$ أو أيضا : $q = \rceil p$

B. جدول قيم حقيقة نفي عبارة :

p	$\bar{p} = \rceil p$
1	0
0	1

C. خاصية :

p عبارة. لدينا : $\bar{\bar{p}} = p$.

02. عطف عبارتين: (العطف المنطقي) connjection

A. تعريف:

عطف عبارتين p و q هو العبارة r التي تكون صحيحة إذا و فقط إذا كانت: p و q صحيحتين في نفس الوقت .
ونرمز لها ب: p و q $r = q$ أو أيضا : $r = p \wedge q$.

B. جدول قيم حقيقة $p \wedge q$:

p	q	p و q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

C. مثال :

p " 2 عدد زوجي " q " 6 يقبل القسمة على 3 "
عطف العبارتين هو العبارة :

p و q " 2 عدد زوجي و 6 يقبل القسمة على 3 "

D. خاصية:

p و q و r ثلاث عبارات :

- العطف تبادلي : p و $q = q$ و p.
- العطف تجمعي : $(p$ و $q)$ و $r = p$ و $(q$ و $r)$. لهذا يجوز كتابة كلتا العبارتين على الشكل الآتي : p و q و r

03. فصل عبارتين : (الفصل المنطقي) disjonction

A. تعريف :

فصل عبارتين p و q هو العبارة r التي تكون خاطئة فقط إذا كانت p و q خاطئتين في نفس الوقت.
ونرمز لها ب : p أو q $r =$ أو أيضا : $r = p \vee q$.

B. تمرين :

a) قارن $\overline{p \vee q}$ ثم $\bar{p} \wedge \bar{q}$.

C. خاصية :

p و q و r ثلاث عبارات:

- الفصل تبادلي : p أو $q = q$ أو p
- الفصل تجمعي : $(p$ أو $q)$ أو $r = p$ أو $(q$ أو $r)$. لهذا يجوز كتابة كلتا العبارتين على الشكل الآتي : p أو q أو r .
- الفصل توزعي على العطف :
  - توزيعية على اليمين: $(p$ و $q)$ أو $r = (p$ أو $r)$ و $(q$ أو $r)$
  - توزيعية على اليسار: p أو $(q$ و $r) = (p$ أو $q)$ و $(p$ أو $r)$
- العطف توزعي على الفصل نعوض مكان (أو) ب (و) ثم مكان (و) ب أو .

D. قانوني موركن – LOIS DE MORGAN -

- نفي العطف: $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$ ($\wedge =$ و) ؛ ($\vee =$ أو)
- نفي الفصل: $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$

04. استلزام عبارتين : implication

A. تعريف :

استلزام عبارتين p ثم q في هذا الترتيب هو العبارة التي يرمز لها ب: $\bar{p}$ أو q ، و تكون خاطئة فقط عندما تكون p صحيحة و q خاطئة . و نرمز لها كذلك ب: $p \Rightarrow q$.
تقرأ: p تستلزم q. أو أيضا: إذا كان p فإن q.

B. جدول قيم حقيقة استلزام عبارتين:

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

C. مفردات

نعتبر الاستلزام $p \Rightarrow q$.

- العبارة p تسمى معطيات الاستلزام.
- العبارة q تسمى نتيجة الاستلزام.
- الاستلزام : $p \Rightarrow q$ يسمى الاستلزام المباشر .
- الاستلزام : $q \Rightarrow p$ يسمى الاستلزام العكسي .

- الاستلزام $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ يسمى الاستلزام المضاد للعكس ل $p \Rightarrow q$.

D. خاصية :

p و q و r ثلاث عبارات

- الاستلزام متعدي: $[(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- نفي الاستلزام: $\rceil(p \Rightarrow q) = \overline{p \Rightarrow q} = p$ و $\overline{q}$.

05. تكافؤ عبارتين: équivalence

A. تعريف :

العبارة " $(p \Rightarrow q)$ و $(q \Rightarrow p)$ "تسمى تكافؤ العبارتين p و q هي صحيحة فقط عندما تكون ل p و q نفس قيمة حقيقة معا.
و يرمز لها ب: $p \Leftrightarrow q$.
و تقرأ : p تكافئ q. أو أيضا: p تعني q. أو أيضا: p إذا و فقط إذا كان q .

B. جدول قيم حقيقة تكافؤ عبارتين هو:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

C. خاصية :

p و q و r ثلاث عبارات

- التكافؤ تبادلي : $(p \Leftrightarrow q) = (q \Leftrightarrow p)$
- التكافؤ متعدي $[(p \Leftrightarrow q)$ و $(q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

III. القوانين المنطقية: lois logiques

A. تعريف:

كل عبارة مكونة من عدة عبارات مرتبطة فيما بينها بالروابط المنطقية و تكون صحيحة مهما كانت قيم حقيقة هذه العبارات المكونة لها ، فهي تسمى قانون منطقي.

B. أمثلة:

- قانوني موركان
- جميع الخاصيات التي سبق ذكرها في العمليات المنطقية.
  (مثال : التبادلية التجمعية – التعدي....)

IV. أنواع الاستدلالات الرياضية: TYPES (OU MODES) DE RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

01. الاستدلال بالمثال المضاد: PAR CONTRE EXEMPLE

A. تعريف:

لكي نبرهن على أن العبارة " $\forall x \in E , A(x)$ " خاطئة يكفي أن نبرهن أن نفيها " $\exists x \in E , \overline{A(x)}$ " عبارة صحيحة .
و هذا النوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالمثال المضاد.

B. مثال:

مثال1: هل مجموع عددين اللاجذريين هو عدد اللاجذري؟

جواب: نعطي مثال مضاد:

لدينا : $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ عددان اللاجذريان ولكن مجموعهما هو $0=\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)$ ليس بعدد اللاجذري بل هو عدد طبيعي.

خلاصة: مجموع عددين اللاجذريين ليس دائما بعدد اللاجذري.

02. الاستدلال باستعمال التكافؤات المتتالية par équivalence successives:

A. خاصية:

p و p_1 و p_2 و p_3 و.... و p_k و q عبارات.

إذا كانت التكافؤات التالية $p \Leftrightarrow p_1$ ، $p_1 \Leftrightarrow p_2$ ، .. و $p_k \Leftrightarrow q$ كلها صحيحة فإن $p \Leftrightarrow q$ تكافئا صحيحا.

B. مثال:

a و b من $\mathbb{R}$. بين: $a^2+b^2=2ab \Leftrightarrow a=b$

جواب: لدينا: $a^2+b^2=2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab=0$

$$\Leftrightarrow \left(a-b\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow a-b=0$$
$$\Leftrightarrow a=b$$

خلاصة: $a^2+b^2=2ab \Leftrightarrow a=b$

03. الاستدلال الاستنتاجي déductif:

A. خاصية:

إذا كان الاستلزام $p \Rightarrow q$ صحيح و p صحيحة (أو p كمعطى في تمرين) فإن q صحيحة (نستنتج q).

الاستدلال باستعمال هذا النوع يسمى الاستدلال بالاستنتاج.

B. مثال:

مثال1:

-1 بين أن: $\forall a,b>0\ ,\ \sqrt{ab}\leq \frac{a+b}{2}$.

-2 استنتج أن: $\forall x>0\ ,\ 2\sqrt{x}\leq 1+x$.

-3 بين أن: $\forall x,y>0\ ,\ 4\sqrt{xy}\leq \left(1+x\right)\left(1+y\right)$

مثال2:

-1 أحسب: $\left(x-1\right)\left(x+3\right)$

-2 حل المعادلة: $x\in\mathbb{R} / x^2+2x-3=0$. استنتج حلول المعادلة : حل المعادلة: $x\in\mathbb{R} / x^2+2\left|x\right|-3=0$

04. الاستلزام المضاد للعكس contraposé:

A. خاصية:

$\left(p\Rightarrow q\right)\Leftrightarrow\left(\overline{q}\Rightarrow\overline{p}\right)$ قانون منطقي.

B. ملحوظة:

بدل من أن نبرهن على صحة الاستلزام $p\Rightarrow q$ نبرهن على صحة الاستلزام $\overline{q}\Rightarrow\overline{p}$ وبالتالي الاستلزام $p\Rightarrow q$ المطلوب اثباته يصبح صحيح. و هذا النوع من الاستدلال (أو البرهان) المستعمل يسمى الاستدلال المضاد للعكس.

C. مثال:

بين أن: $\forall x,y \in]2,+\infty[\ , x \neq y \Rightarrow x^2-4x \neq y^2-4y$

جواب:

نستدل على ذلك باستعمال الاستدلال المضاد للعكس؛ أي نبرهن على: $\forall x,y \in]2,+\infty[\ , x^2-4x = y^2-4y \Rightarrow x=y$

ليكن x و y من $]2,+\infty[$ حيث $x^2-4x=y^2-4y$

$$x^2-4x=y^2-4y \Rightarrow x^2-4x+4=y^2-4y+4$$
$$\Rightarrow (x-2)^2=(y-2)^2$$
$$\Rightarrow x-2=y-2 \text{ أو } x-2=-(y-2)$$
$$\Rightarrow x=y \text{ أو } x+y-4=0$$
$$\Rightarrow x=y$$

$x+y-4=0$ غير ممكن لأن: $x>2$ و $y>2$ أي $x+y>4$ أي $x+y-4>0$.

ومنه : $x^2-4x=y^2-4y \Rightarrow x=y$. صحيح. و بالتالي الاستلزام المضاد للعكس له : $x \neq y \Rightarrow x^2-4x \neq y^2-4y$ يصبح صحيح.

خلاصة: $\forall x,y \in]2,+\infty[\ , x \neq y \Rightarrow x^2-4x \neq y^2-4y$

05. الاستدلال بفصل الحالات: PAR DISJONCTION DES CAS

A. خاصية:

p و q و r ثلاث عبارات.

العبارة $[p \Rightarrow q \text{ و } r \Rightarrow q] \Leftrightarrow [(p \text{ أو } r) \Rightarrow q]$ هي قانون منطقي .

B. مصطلح:

للاستدلال على $(p \text{ أو } r) \Rightarrow q$ انه استلزام صحيح يمكن أن نستدل على أن الاستلزامين $r \Rightarrow q$ ثم $p \Rightarrow q$ صحيحين هذا النوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بفصل الحالات.RAISONNEMENT PAR DISJONCTION DES CAS

C. مثال: حل المعادلة: $x \in \mathbb{R} : |x+1|+2x=0$

المعادلة تكتب على الشكل التالي: $x \in]-\infty,-1] \cup [-1,+\infty[: |x+1|+2x=0$

حالة1: $x \in]-\infty,-1]$.

$$|x+1|+2x=0 \Leftrightarrow -(x+1)+2x=0$$
$$\Leftrightarrow x-1=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \notin]-\infty,-1]$$

ومنه : $S_1=\varnothing$

حالة2: $x \in [-1,+\infty[$.

$|x+1|+2x=0 \Leftrightarrow (x+1)+2x=0 \Leftrightarrow 3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \in [-1,+\infty[$. ومنه: $S_2=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

خلاصة: مجموعة حلول المعادلة: $S=S_1 \cup S_2=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

06. الاستدلال بالخلف: PAR ABSURDE

A. خاصية:

العبارة $q \Rightarrow \left[\bar{q} \Rightarrow (p \text{ و } \bar{p}) \right]$ هي قانون منطقي .

الاستدلال باستعمال هذا النوع من الاستدلال يسمى الاستدلال بالخلف.

B. ملاحظة: لكي نستدل على صحة عبارة q :

1. p هي إحدى المعطيات. (p هي عبارة صحيحة)

2. نفترض أن: q خاطئة (أي $\bar{q}$ صحيحة)

3. هذا الافتراض يؤدي للحصول على $\bar{p}$ عبارة صحيحة و بالتالي نحصل على $\bar{p}$ و p عبارتين صحيحتين و هذا غير ممكن.

4. نقول ما افترضناه (q خاطئة) كان غير صحيح. ومنه q صحيحة.

C. مثال:

نضع : r عدد جذري و i عدد اللاجذري. و $s = r + i$.

بين أن : s مجموع عدد جذري وعدد اللاجذري هو عدد اللاجذري .

جواب:

نفترض أن s عدد جذري.

لدينا: $s = r + i$ و منه $s - r = i$ وبالتالي $s - r$ عدد جذري (لإن فرق عددين جذريين هو عدد جذري) ومنه: i عدد جذري.

ومنه : i عدد اللاجذري و i عدد جذري. و هذا غير ممكن.

إذن ما افترضناه i عدد جذري كان خاطئا و الصحيح هو i عدد اللاجذري.

07. الاستدلال بالترجع: par récurrence

A. خاصية:

n_0 عدد صحيح طبيعي معلوم.

$P(n)$ دالة عبارية لمتغير صحيح طبيعي n مع $n \geq n_0$.

إذا كان :

1) $P(n)$ صحيحة من أجل $n = n_0$.

2) الاستلزام $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ صحيح لكل $n \geq n_0$ (مع n من $\mathbb{N}$).

فإن : $P(n)$ صحيحة لكل n من $\mathbb{N}$ حيث $n \geq n_0$.

أو أيضا : العبارة " $\forall n \geq n_0 \; (n \in \mathbb{N}) , P(n)$ " صحيحة.

B. ملحوظة:

عند استعمال البرهان بالترجع نتبع المراحل التالية:

1. المرحلة 1:

نتحقق بأن: $P(n)$ صحيحة للرتبة الأولى $n = n_0$ (أي $P(n)$ صحيحة)

2. المرحلة 2:

نفترض بأن: $P(n)$ صحيحة إلى الرتبة n.

و هذا الافتراض يسمى معطيات الترجع .

3. المرحلة 3:

نبين أن: العلاقة $P(n)$ صحيحة للرتبة $n+1$.

C. مثال: بين بالترجع : لكل n من $\mathbb{N}$ ؛ 3 تقسم n^3-n

نتحقق أن : العلاقة صحيحة ل $n=0$. لدينا 3 تقسم $0^3-0=0$

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي 3 تقسم n^3-n هي صحيحة.

نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي 3 تقسم $(n+1)^3-(n+1)$

المطلوب منك أن تبين ذلك.

D. الرمز $\sum$ و $\prod$.

a. الرمز $\sum$.

نرمز للمجموع التالي : $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ ب $\sum_{i=1}^{i=n} a_i$ ويمكن استعمال j أو k بدل من i .

مثال 1 : $\sum_{i=1}^{i=n} 2i = 2+4+6+\cdots+2n$. (المجموع متكون من n حدد)

مثال 2 : $\sum_{i=0}^{i=n}(2i+1)=1+3+5+\cdots+(2n+1)$. (المجموع متكون من $n+1$ حدد)

خاصيات :

1. $\sum_{k=0}^{k=n} b_k + \sum_{k=0}^{k=n} a_k = \sum_{j=0}^{j=n} b_j + \sum_{j=0}^{j=n} a_j = \sum_{j=0}^{j=n}(a_j+b_j)$.

   ($\sum_{j=0}^{j=n}(a_j+b_j)=\sum_{j=0}^{j=n}a_j+\sum_{j=0}^{j=n}b_j=\sum_{k=0}^{k=n}a_k+\sum_{k=0}^{k=n}b_k$)

2. $\sum_{j=1}^{j=n}(a_j+c)=\sum_{j=1}^{j=n}a_j+nc$ (لأن المجموع متكون من n حدد مع c عدد ثابة) .

b. الرمز $\prod$.

نرمز للجداء التالي : $a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$ ب $\prod_{j=1}^{j=n} a_j$ ويمكن استعمال i أو k بدل من i .

مثال 1 : $\prod_{k=1}^{k=n} 2k = 2\times4\times6\times\cdots\times2n$. (الجداء متكون من n عامل)

مثال 2 : $\prod_{i=1}^{i=n}(2i+1)=1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)$. (الجداء متكون من $n+1$ عامل)

خاصيات :

3. $\sum_{j=0}^{j=n}(a_j+b_j)=\prod_{j=0}^{j=n}a_j\times\prod_{j=0}^{j=n}b_j=\prod_{k=0}^{k=n}a_k\times\prod_{k=0}^{k=n}b_k$.

4. $\prod_{j=1}^{j=n}(ca_j)=c^n\prod_{j=1}^{j=n}a_j$ (لأن الجداء متكون من n عامل ل c مع c عدد ثابة) .

c. تمارين :

بين أن :

1. $\forall n\in\mathbb{N}^*: 1+2+3+\cdots+n=\sum_{i=1}^{i=n} i=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $\forall n\in\mathbb{N}^*: 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{i=1}^{i=n} i^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $\forall n\in\mathbb{N}^*: 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{i=1}^{i=n} i^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.