

فرض مسرور رقم 3

التمرين الأول (3 نقط)

ليكن p عدد من $\mathbb{Z}$. نعتبر العددين $a = 43p - 13$ ، $b = 17p - 5$ و نضع $d = a \wedge b$

(1) أ- بين أن $a \wedge b = (p-1) \wedge 6$ (1 ن)

ب- استنتج القيم الممكنة للعدد d (0,5 ن)

(2) أ- حدد p كي يكون $a \wedge b = 6$ (0,5 ن)

ب- حدد قيم p و التي يكون من أجلها $a \wedge b = 3$ (1 ن)

التمرين الثاني (3 نقط)

(1) أ- أحسب 2^4 ثم استنتج أن $2^8 \equiv 1 [17]$ (0,75 ن)

ب- تحقق أن $3^2 \equiv -8 [17]$ ثم استنتج أن $3^{16} \equiv 1 [17]$ (0,75 ن)

(2) حدد باقي القسمة الاقليدية العدد $2010^{1431} + 1431^{2010}$ على العدد 17 (1,5 ن)

التمرين الثالث (2 نقط)

(1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية x ; y و التي تحقق : $x \wedge y = 5$ و $x^2 + y^2 = 325$ (1 ن)

(2) بين أنه إذا كان $a \wedge b = 1$ فإن $(ab) \wedge (a^2 + b^2) = 1$ (1 ن)

التمرين الرابع (9 نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

(1) أ- ما هي مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (1,5 ن)

ب- أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين (0,5 ن)

(2) أ- بين أن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن $f'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (0,5 ن + 0,5 ن)

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f (0,5 ن)

(3) أ- أعط معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأصول $x_0 = 0$ (0,5 ن)

ب- تحقق أن $f(x) - x = \frac{-x^2(x+1)}{\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) (0,5 ن)

ثم أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (0,5 ن)

(4) أرسم المنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (1 ن)

(5) لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $U_0 = -\frac{3}{4}$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بين أن $-1 < U_n < 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (0,5 ن)

ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ (0,5 ن)

ج- بين أن $|U_{n+1} + 1| \leq \frac{4}{5} |U_n + 1|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (1 ن)

د- استنتج أن $|U_n + 1| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (1 ن)