01 .... 10 نقط

نعتبر في $(\mathcal{E})$ النقط $A(-3,0,-1)$ و $B(1,5,-1)$ و $C(-1,3,0)$

1) ندرس استقامية النقط A و B و C.

لهذا نحسب المحددات المستخرجة :

لدينا : $\overrightarrow{AB}(4,5,0)$ و $\overrightarrow{AC}(2,3,1)$ ومنه : $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتين .

خلاصة : النقط A و B و C غير مستقيمية .

2) اعطاء معادلة ديكارتية للمستوى (P) المحدد بالنقط A و B و C.

لدينا :
$$M(x,y,z) \in (P) \Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 4 & 2 \\ y & 5 & 3 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow (x+5)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z+1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 0$$
$$\Leftrightarrow 5x-4y+2z+17=0$$

خلاصة : معادلة ديكارتية للمستوى (P) هي : $5x-4y+2z+17=0$: (P) .

3) لتكن (S) مجموعة النقط $M(x,y,z)$ من الفضاء $(\mathcal{E})$ حيث : $x^2+y^2+z^2-2x-6y+z-10=0$

هل النقطة $E(-5,0,0)$ تنتمي إلى (S) .

لدينا : $(-5)^2+10-10=25\neq 0$ و منه : $E(-5,0,0)\notin(S)$.

خلاصة : $E(-5,0,0)\notin(S)$

4) بين أن: (S) فلكة محدد مركزها و شعاعها .

لدينا : $x^2-2x+y^2-6y+z^2+z-10=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-3)^2-9+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-10=0$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-3)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{81}{5}=\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

المعادلة التالية تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها : $\Omega\left(1,3,\frac{1}{2}\right)$ و شعاعها $R_S=\frac{9}{2}$.

خلاصة : (S) هي فلكة : مركزها : $\Omega\left(1,3,-\frac{1}{2}\right)$ و شعاعها $R_S=\frac{9}{2}$.

5) أحسب $d(\Omega,(P))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (P).

لدينا : $d(\Omega,(P))=\dfrac{\left|5\times1-4\times3+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-17\right|}{\sqrt{5^2+(-4)^2+2^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

خلاصة : $d(\Omega,(P))=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

6) استنتج الوضع النسبي للمستوى (P) و الفلكة (S).

لدينا : $d=d(\Omega,(P))=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ و $R_S=\frac{9}{2}$ ومنه : $\frac{3\sqrt{5}}{5}<\frac{9}{2}$ أي $d=d(\Omega,(P))<R_S$

خلاصة : المستوى (P) و الفلكة (S) يتقاطعان وفق دائرة .

7) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من Ω و العمودي على المستوى (P).

لدينا $\vec{n}(5,-4,2)$ متجهة منظمية على المستوى (P) إذن هي موجهة للمستقيم (D) و (D) يمر من $\Omega\left(1,3,-\frac{1}{2}\right)$

خلاصة : تمثل بارامتري ل (D) هو $(D)\ :\ t\in\mathbb{R}/\begin{cases}x=1+5t\\y=3-4t\\z=-\frac{1}{2}+2t\end{cases}$

8) حدد مثلوث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (C).

لدينا : H مركز الدائرة (C) هي المسقط العمودي ل Ω على (P) أو أيضا : H هي تقاطع (D) و (P) .

$$H(x,y,z)\in(P)\cap(D)\Leftrightarrow\begin{cases}H(x,y,z)\in(P)\\H(x,y,z)\in(D)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5x-4y+2z+17=0\\\begin{cases}x=1+5t\\y=3-4t\\z=-\frac{1}{2}+2t\end{cases}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5(1+5t)-4(3-4t)+2\left(-\frac{1}{2}+2t\right)+17=0\\\begin{cases}x=1+5t\\y=3-4t\\z=-\frac{1}{2}+2t\end{cases}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{1}{5}\\\begin{cases}x=0\\y=\frac{19}{5}\\z=\frac{-9}{10}\end{cases}\end{cases}$$

خلاصة : مثلوث إحداثيات النقطة H مركز الدائرة (C) هو $\left(0,\frac{19}{5},\frac{-9}{10}\right)$.

9) حدد R شعاع الدائرة (C) تقاطع المستوى (P) و الفلكة (S) .

لدينا : $R=\sqrt{(R_S)^2-d^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2}=3\frac{\sqrt{205}}{10}$ شعاع الدائرة (C) يحقق ما يلي :

خلاصة : شعاع الدائرة (C) هو $R=3\frac{\sqrt{205}}{10}$

10) اعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المماس للفلكة (S) في $F(1,3,4)$.

لدينا :

$$M(x,y,z)\in(Q)\Leftrightarrow \overrightarrow{FM}.\overrightarrow{F\Omega}=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x-1\\y-3\\z-4\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}(z-4)=0$$

$$\Leftrightarrow z-4=0$$

خلاصة : معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المماس للفلكة (S) في $F(1,3,4)$ هي : $z-4=0$: (Q) .

02. 3 نقط

في مؤسسة للتعليم الخاص كل تلميذ يختار لغة واحدة فقط من بين اللغتين : الكورية و الصينية و نوع رياضي واحد فقط من بين : السباحة – كرة المضرب – المسايفة . نأخذ مجموعة من تلاميذ هذه المؤسسة نجد 12 يمارسون المسايفة و 15 يمارسون كرة المضرب و 16 يدرسون الصينية . و من جهة أخرى من بين الذين يدرسون الكورية هناك 8 يمارسون المسايفة و 3 يمارسون السباحة ؛ 6 يمارسون كرة المضرب يدرسون الصينية .

1. مثل المعطيات على الجدول التالي ثم أتمم الجدول يوضح توزيع التلاميذ حسب اللغة التي يدرسونها و الرياضة التي يمارسونها .

الرياضة / اللغة	السباحة	كرة المضرب	المسايفة	المجموع
الكورية	3	9	8	20
الصينية	6	6	4	16
المجموع	9	15	12	36

2. ما هو عدد تلاميذ هذه المجموعة ؟

من خلال الجدول نستنتج أن عدد تلاميذ هذه المجموعة هو 36 .

03. 3 نقط

1. حدد العدد الصحيح الطبيعي n حيث : $A_n^3=210n$.

لدينا : $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$ (أي $n \geq 3$) .

ومنه : $A_n^3 = 210n \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 120n$.

$$\Leftrightarrow (n-1)(n-2) = 120 \ ; \ \ (n \geq 3)$$
$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 280 = 0$$
$$\Leftrightarrow n = -13 \not\geq 3 \text{ أو } n = 16 \geq 3$$

خلاصة : العدد المطلوب هو $n = 16$.

.2 نسط ما يلي : أ- $\sum_{k=1}^{k=n-1} C_n^k$.

لدينا :

$$\sum_{k=1}^{k=n-1} C_n^k = \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k - \left(C_n^0 + C_n^n\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k 1^k \times 1^{n-k} - (1+1)$$
$$= (1+1)^n - 2 \quad \text{(حسب حدانية النيوتن } a=1 \text{ و } b=1 \text{)}$$
$$= 2^n - 2$$

.3 ما هو عدد الأعداد حيث A " المتكونة من 4 أرقام و تحتوي على الرقم 0 "؟

لدينا : رقم الوحدات له 10 اختيارات و رقم العشرات له 10 اختيارات و رقم المئات له 10 اختيارات ورقم الآلاف له 9 اختيارات .

ومنه : عدد الأعداد المتكونة من 4 أرقام هو $\text{card}\Omega = 9 \times 10^3 = 9000$.

من جهة أخرى : نستعمل نفي العبارة A هو $\overline{A}$ " عدد الأعداد التي تكتب بدون استعمال الرقم 0 " .

رقم الوحدات له 9 اختيارات و رقم العشرات له 9 اختيارات و رقم المئات له 9 اختيارات ورقم الآلاف له 9 اختيارات .

ومنه : $\text{card}\overline{A} = 9^4$.

إذن : $\text{card}A = \text{card}\Omega - \text{card}\overline{A} = 9 \times 10^3 - 9^4 = 2439$.

خلاصة : عدد الأعداد المتكونة من 4 أرقام و تحتوي على الرقم 0 هو $\text{card}A = 2439$

.04 .... 4 نقط

صندوق يحتوي على n^2 كرة مرقمة من 1 إلى n^2 . نسحب تآنيا 3 كرات من الصندوق .

.1 عدد السحبات الممكنة .

بما أننا نسحب تآنيا 3 كرات من الصندوق من بين n^2 كرة إذن كل سحبة تمثل تأليفة ل 3 من بين n^2 ومنه عدد السحبات الممكنة هو عدد التأليفات ل 3 من بين n^2 .

خلاصة : عدد السحبات الممكنة هو $\text{card}\Omega = C_{n^2}^3 = \dfrac{n^2\left(n^2-1\right)\left(n^2-2\right)}{3!}$.

.2 ما هو عدد السحبات حيث :

A " كرة واحدة بالضبط تحمل رقم يكون مربع كامل " .

لدينا عدد الكرات التي تحمل رقم يكون مربع كامل هو n

- إذن تكون كرة تحمل مربع كامل أي $C_n^1 = n$.
- كرتين لا تحملان رقم يكون مربع كامل من بين $n^2 - n$ أي $C_{n^2-n}^2 = \dfrac{\left(n^2-n\right)\left(n^2-n-1\right)}{1 \times 2}$.
- $\text{card}A = C_n^1 \times C_{n^2-n}^2 = n\dfrac{\left(n^2-n\right)\left(n^2-n-1\right)}{1 \times 2}$

خلاصة : A " كرة واحدة بالضبط تحمل رقم يكون مربع كامل " لدينا $cardA = C_n^1 \times C_{n^2-n}^2$.

B " على الأقل كرة تحمل رقم يكون مربع كامل "

لنعتبر $\overline{B}$ نفي B ومنه : $\overline{B}$ " ولو كرة تحمل رقم يكون مربع كامل "

لدينا: عدد الكرات التي لا تحمل رقم يكون مربع كامل هو $n^2 - n$ ومنه : $card\overline{B} = C_{n^2-n}^3 = \dfrac{(n^2-n)(n^2-n-1)(n^2-n-2)}{3!}$

ومنه : $cardB = card\Omega - card\overline{B} = C_{n^2}^3 - C_{n^2-n}^3 = \dfrac{n^2(n^2-1)(n^2-2)}{3!} - \dfrac{(n^2-n)(n^2-n-1)(n^2-n-2)}{3!}$

خلاصة : B " على الأقل كرة تحمل رقم يكون مربع كامل " هو : $cardB = card\Omega - card\overline{B} = C_{n^2}^3 - C_{n^2-n}^3$.

3. في هذا السؤال نسحب 3 كرات بالتتابع و بدون إحلال. ما هو عدد السحبات حيث : C " مجموع أرقام الكرات الثلاث هو $3n^2 - 3$ "

نضع x و y و z أرقام 3 الكرات المسحوبة بالتتابع وبدون إحلال مع $x \le n^2$ و $y \le n^2$ و $z \le n^2$ إذن $y + z \le 2n^2$ (1)

نلاحظ أن : كرة تحمل رقم $x < n^2 - 3$ غير ممكن لأن $x + y + z = 3n^2 - 3$ ومنه

$$x + y + z < x + y + n^2 - 3$$
$$3n^2 - 3 < x + y + n^2 - 3$$
$$2n^2 < x + y \qquad ; \qquad (2)$$

حسب (1) و (2) غير ممكن إذن الكرات الثلاث أرقامها أكبر من أو يساوي $n^2 - 2$ و بما أن السحب بالتتابع وبدون إحلال ل 3 كرات إذن الكرات 3 أرقامها هي : n^2 أو $n^2 - 1$ أو $n^2 - 2$ ومجموع هذه الكرات هو $n^2 + (n^2 - 1) + (n^2 - 2) = 3n^2 - 3$

إذن عدد السحبات بالتتابع ل3 كرات حيث مجموع أرقامها هو : $3n^2 - 3$ من بين الكرات الثلاث هو تبديلة ل 3 (أو ترتيبة بدون تكرا ل 3 من بين 3)

خلاصة : عدد السحبات حيث : C " مجموع أرقام الكرات الثلاث هو $3n^2 - 3$ " هو $cardC = 3!$ أو أيضا : $cardC = A_3^3 = 3! = 6$

نهاية الأجوبة