



نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 - 2x + 4}$

(1) أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f

ب- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أعط تاويلا هندسيا للنتيجة

(2) أ- أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- أدرس الفرع الانتهائي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

(3) أ- بيه أنه $f'(x) = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$ ($\forall x \in \mathbb{R}$)

ب- بيه أنه الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ و أنجز جدول تغيرات الدالة f

(4) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (Δ)

(5) أسمى المنحنى (C_f)

(6) نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

أ- بيه أنه $0 < U_n < 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ و استنتج أنه $1 \leq U_n < 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(7) أ- بيه أنه $\left| U_{n+1} - 2 \right| \leq \frac{4}{5} \left| U_n - 2 \right|$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) (نأخذ $\sqrt{3} > 1,5$)

ب- بيه بالترجح أنه $\left| U_n - 2 \right| \leq \left(\frac{4}{5} \right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ج- نضع $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U_k$ لكل عدد طبيعي غير منعدم n .

بيه أنه $2 - \frac{5}{n} + \frac{4^n}{n \times 5^{n-1}} \leq S_n \leq 2$ ($\forall n \geq 1$)



لكل $(T_n)_{n \geq 0}$ متتالية معرفة بما يلي : $T_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$

نضع $U_n = T_{2n}$ و $V_n = T_{2n+1}$

(1) أ- أحسب U_0 و V_0

ب- بيه أنه $V_n < U_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

(2) بيه أنه المتتالية $(V_n)_{n \geq 0}$ تزايدية و أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$

(3) استنتج أن المتتالية $(T_n)_{n \geq 0}$ محدودة



لكل h دالة معرفة على $]0, +\infty[$ نحو $\mathbb{R}$ و التي تحقق :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \quad h(xy) = h(x) + h(y)$$

(1) حدد $h(1)$

(2) نفترض أنه h قابلة للاشتقاق في النقطة 1 و أنه $h'(1) = 1$.

بيه أنه h قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و حدد دالتها المشتقة $h'(x)$



لكل a, b, c أعداد حقيقية موجبة بيه أنه $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$