01 ....(10 نقط)

لنعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+4}{u_n} ; n\geq 0 \end{cases}$

1. نفترض أن $u_0 = 4$.

أ- أحسب u_1 و u_2 .

لدينا : $u_1 = \dfrac{3u_0+4}{u_0} = \dfrac{3\times 4+4}{4} = 4$ و $u_2 = \dfrac{3u_1+4}{u_1} = \dfrac{3\times 4+4}{4} = 4$

ب- بين بالترجع أن $(u_n)_{n\geq 0}$ ثابتة و ثابتها هو 4 (أي $\forall n\in\mathbb{N} : u_n = 4$)

نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

بالنسبة ل $n=0$ لدينا $u_0 = 4$ إذن العلاقة صحيحة ل $n=0$

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي أن $u_n = 4$ (معطيات الترجع)

نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ أي نبين أن : $u_{n+1} = 4$.

لدينا : $4 = \dfrac{3\times 4+4}{4} = \dfrac{3u_n+4}{u_n} = u_{n+1}$ (حسب معطيات الترجع)

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n\in\mathbb{N} : u_n = 4$

2. نأخذ $u_0 = 1$ و نعتبر المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة ب: $v_n = \dfrac{u_n-4}{u_n+1} ; n\geq 0$.

أ- أحسب v_0.

لدينا : $v_0 = \dfrac{u_0-4}{u_0+1} = \dfrac{1-4}{1+1} = -\dfrac{3}{2}$

ب- بين بالترجع أن : $\forall n\in\mathbb{N} : u_n > 0$.

نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

بالنسبة ل $n=0$ لدينا $u_0 = 1 > 0$ إذن العلاقة صحيحة ل $n=0$

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي أن $u_n > 0$ (معطيات الترجع)

نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ أي نبين أن : $u_{n+1} > 0$.

لدينا :

$u_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} u_n > 0 \\ 3u_n + 4 > 4 \end{cases}$ (حسب معطيات الترجع)

$\Rightarrow \dfrac{3u_n+4}{u_n} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0$

ومنه : العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ u_n > 0$

ج- بين أن : $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$.

لدينا : $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$ ومنه : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{3u_n + 4}{u_n} - 4}{\frac{3u_n + 4}{u_n} + 1} = \frac{-u_n + 4}{4u_n + 4} = -\frac{1}{4} \times \frac{u_n - 4}{u_n + 1} = -\frac{1}{4} \times v_n$

ومنه : $v_{n+1} = -\frac{1}{4} \times v_n$.

خلاصة : $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$

.3

أ- أحسب v_n ثم u_n بدلالة n.

- حساب v_n بدلالة n :

بما أن : $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = -\frac{1}{4}$ إذن حدها العام هو:

$$v_n = v_{n_0} \times q^{n - n_0} = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-0} = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n} .$$

- حساب u_n بدلالة n :

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1} \Rightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 4$$
$$\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 4$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{-v_n - 4}{v_n - 1} = \frac{v_n + 4}{1 - v_n}$$
$$\Rightarrow u_n = \frac{-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + 4}{1 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$$

ومنه : $u_n = \frac{-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + 4}{1 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$.

خلاصة : v_n ثم u_n بدلالة n: $v_n = -\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ و $u_n = \frac{-\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n + 4}{1 + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^n}$.

ب- أحسب : u_{10} .

لدينا : $u_{10} = \dfrac{-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{10}+4}{1+\frac{3}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{10}}$

ج- أحسب المجموع: $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n$.

بما أن : $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q=-\frac{1}{4}$ إذن

$$S_n = \sum_{i=0}^{i=n} v_i = v_0+v_1+v_2+\cdots+v_n = v_{n_0}\times\frac{q^{n-n_0+1}-1}{q-1}$$

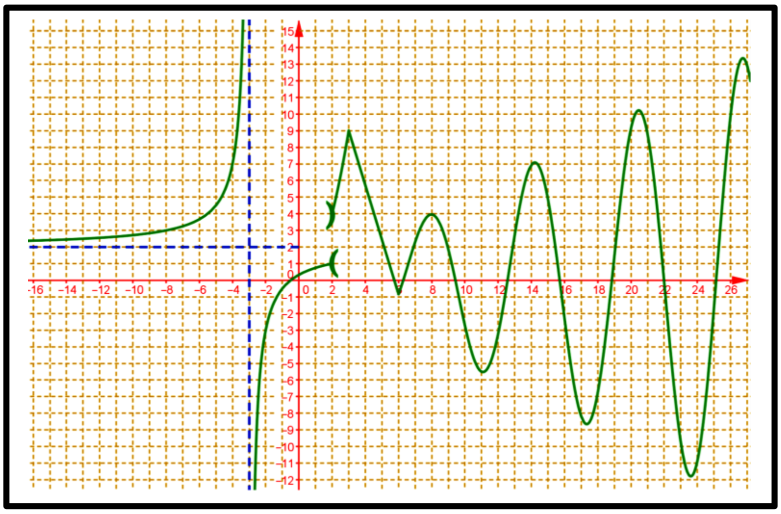
$$= v_0\times\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}-1}{\frac{-1}{4}-1} = -\frac{3}{2}\times\frac{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1}{\frac{-5}{4}} = \frac{6}{5}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right]$$

ومنه : $S_n = \frac{6}{5}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right]$

خلاصة : $S_n = \frac{6}{5}\left[\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}-1\right]$

02. (3 نقط) ....

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .



1. نحدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f .

لدينا : $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$

2. استنتج مبيانيا نهايات f عند محدات D_f .

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.
- $\lim_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$.
- $\lim_{x\to2^-} f(x) = 1$ و $\lim_{x\to2^+} f(x) = 4$.
- f ليس لها نهاية بجوار $+\infty$ (لأن الدالة تأخذ قيم مرة موجبة و مرة سالبة و نعلم إن كان لدالة نهاية فهذه النهاية وحيدة)

03. (نقطتان)..............................

1. نحدد m علما أن f لها نهاية في 2 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = mx+4 \;;\; x>2 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \;;\; x<2 \end{cases}$$

- لدينا نهاية على يمين 2 هي : $\lim_{x\to2^+} f(x) = \lim_{x\to2^+} mx+4 = 2m+4$ (لأن f دالة حدودية) .

ومنه : $\lim_{x\to2^+} f(x) = 2m+4$

- لدينا نهاية على يسار 2 هي :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\left(\sqrt{x+7}+3\right)} = \frac{1}{6}$$

ومنه : $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \frac{1}{6}$.

- f لها نهاية في 2 إذن النهاية على اليمين تساوي النهاية على اليسار أي $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$

ومنه : $\frac{1}{6} = 2m+4$ أي $m = -\frac{23}{12}$.

خلاصة : قيمة m حيث f لها نهاية في 2 هي $m = -\frac{23}{12}$.

.04 .... (5 نقط)

أحسب النهايات التالية :

1. $\lim_{x\to 2} 4x^3 - x^2 + 1$; 2. $\lim_{x\to -\infty} 3x^7 + 2x^3 - 21x^2 + 1$ 3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^3 - x + 4}{2 - x^8}$ 4. $\lim_{x\to 7^-} \frac{x+2}{x-7}$ 5. $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-16}$

لدينا :

- $\lim_{x\to 2} 4x^3 - x^2 + 1 = 4\times 2^3 - 2^2 + 1 = 29$.
- $\lim_{x\to -\infty} 3x^7 + 2x^3 - 21x^2 + 1 = \lim_{x\to -\infty} 3x^7 = -\infty$.
- $\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^3 - x + 4}{2 - x^8} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5x^3}{-x^8} = \lim_{x\to +\infty} \frac{5}{-x^5} = 0$ (لأن $\lim_{x\to +\infty} -x^5 = -\infty$) .
- لدينا : $\lim_{x\to 7^-} x+2 = 9$ و $\lim_{x\to 7^-} x-7 = 0^-$ ومنه : $\lim_{x\to 7^-} \frac{x+2}{x-7} = -\infty$.
- $\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{x^2-16} = \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(x+4)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{(x+4)} = \frac{1}{8}$