هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تصحيح الفرض المحروس رقم ③

التمرين ①

(1) لدينا $P''\ (\forall x\in\mathbb{R}^{+*})(\exists m\in\mathbb{N})\ mx>1$"

إذن $\bar{P}$" $(\exists x\in\mathbb{R}^{+*})(\forall m\in\mathbb{N})\ mx\leqslant 1$"

ولدينا Q" $\left[(\forall m\in\mathbb{N}^*)\ |x|<\frac{1}{m}\right]\Rightarrow x=0$"

- نفي العبارة Q :

نعلم أن نفي الاستلزام $a\Rightarrow b$ هي العبارة a و $\bar{b}$

ومنه فإن :

$\bar{Q}$" $(\forall m\in\mathbb{N}^*)\ |x|<\frac{1}{m}$ و $x\neq 0$"

(2) P: $(\forall x\in\mathbb{R}^{+*})(\exists m\in\mathbb{N})\ mx>1$"

لنبين أن P صحيحة

$mx>1 \Leftrightarrow m>\frac{1}{x}$

ونعلم أن $E\left(\frac{1}{x}\right)<\frac{1}{x}<E\left(\frac{1}{x}\right)+1$

نضع $p=E\left(\frac{1}{x}\right)$ عدد طبيعي لأن $\left(\frac{1}{x}\in\mathbb{R}^{+*}\right)$

ومنه $p<\frac{1}{x}<p+1$ ؛ نضع $m=p+1$

$\frac{1}{x}<m$

إذن $(\exists m=p+1\in\mathbb{N})\quad mx>1$

التمرين ②

(1) بين أن $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^{2})(x>2, y>2)\Rightarrow(xy>x+y)$

$(x>2, y>2)\Rightarrow(x-1>1, y-1>1)$

$\Rightarrow (x-1)(y-1)>1$

$\Rightarrow 1+xy-x-y>1$

$\Rightarrow xy>x+y$

(2) بين بالبرهان بالعكس :

$(\forall x>2)(\forall y>2):(x\neq y)\Rightarrow(x\sqrt{y-1}\neq y\sqrt{x-1})$

أي نبين أن

$(\forall x>2)(\forall y>2)\ (x\sqrt{y-1}=y\sqrt{x-1})\Rightarrow(x=y)$

$x\sqrt{y-1}=y\sqrt{x-1}\Rightarrow x^2(y-1)=y^2(x-1)$

$\Rightarrow x^2y-x^2-y^2x+y^2=0$

$\Rightarrow xy(x-y)-(x-y)(x+y)=0$

$\Rightarrow (x-y)(xy-x-y)=0$

وبما أن $(\forall x>2)(\forall y>2)$ فإن $xy-x-y\neq 0$

وعليه $x=y$

وبالتالي فإن

$(\forall x>2)(\forall y>2):\left[x\neq y\Rightarrow x\sqrt{y-1}\neq y\sqrt{x-1}\right]$

التمرين ③

(1) بين بالترجع أن

$(\forall m\in\mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{k=m}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2m+5}{3^m}\right)$

من أجل $m=0$

لدينا $\frac{1+1}{3^1}=\frac{2}{3}$

و $\frac{1}{4}\left(5-\frac{2\times 1+5}{3^1}\right)=\frac{2}{3}$

علاقة صحيحة

نفترض أن : $\sum_{k=1}^{k=m}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2m+5}{3^m}\right)$

ونبين أن : $\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2(m+1)+5}{3^{m+1}}\right)$

لدينا

$$\sum_{k=1}^{k=m+1}\frac{k+1}{3^k}=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{k+1}{3^k}+\frac{m+2}{3^{m+1}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2m+5}{3^m}\right)+\frac{m+2}{3^{m+1}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2m+5}{3^m}+\frac{4m+8}{3^{m+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{6m+15-4m-8}{3^{m+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2m+7}{3^{m+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2(m+1)+5}{3^{m+1}}\right)$$

وحسب مبدأ الترجع فإن :

$(\forall m\in\mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{k=m}\frac{k+1}{3^k}=\frac{1}{4}\left(5-\frac{2m+5}{3^m}\right)$

(2) بين بالترجع أن :

$(\forall m\in\mathbb{N}^*)\ \sum_{k=1}^{k=2m+1}(-1)^{k+1}k=m+1$

من أجل $m=1$

لدينا $\sum_{k=1}^{k=3}(-1)^{k+1}k=1-2+3=2=1+1$

علاقة صحيحة.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

نفترض أن $\sum_{k=1}^{k=m+1} (-1)^{k+1} k = m+1$

ونبين أن $\sum_{k=1}^{k=2(m+1)+1} (-1)^{k+1} k = m+2$

لدينا $\sum_{k=1}^{k=2m+3} (-1)^{k+1} k = \sum_{k=1}^{k=2m+1} (-1)^{k+1} k + (-1)^{2m+3}(2m+2) + (-1)^{2m+4}(2m+3)$

$= m+1 - (2m+2) + (2m+3)$

$= m+1 - 2m - 2 + 2m + 3$

$= m+2$

وبالتالي فإن

$$(\forall m \in \mathbb{N}^*) \quad \sum_{k=1}^{k=2m+1} (-1)^{k+1} k = m+1$$

التمرين (4) :

(1) احسب u_1 وبين أن $(\forall m \in \mathbb{N}) \quad a < u_m < b$

لدينا

$$u_1 = \frac{ab}{a+b-u_0}$$

$$= \frac{ab}{a+b-\frac{a+b}{2}}$$

$$= \frac{2ab}{2a+2b-a-b}$$

$$u_1 = \frac{2ab}{a+b}$$

من أجل $m=0$ $\quad a < u_0 = \frac{a+b}{2} < b$ صحيحة

نفترض أن : $\quad a < u_m < b$

ونبين أن : $\quad a < u_{m+1} < b$

لدينا $\quad a < u_m < b$

$-b < -u_m < -a$

$a < a+b-u_m < b$

$\frac{1}{b} < \frac{1}{a+b-u_m} < \frac{1}{a}$

$a < \frac{ab}{a+b-u_m} < b$

$a < u_{m+1} < b$

وحسب مبدأ الترجع

فإن : $\quad a < u_m < b$

(2) بين أن $(u_m)_m$ متتالية تناقصية :

يعني نبين أن $u_{m+1} < u_m$

لدينا

$$u_{m+1} - u_m = \frac{ab}{a+b-u_m} - u_m$$

$$= \frac{ab - au_m - bu_m + u_m^2}{a+b-u_m}$$

$$= \frac{a(b-u_m) - u_m(b-u_m)}{a+b-u_m}$$

$$= \frac{(b-u_m)(a-u_m)}{a+b-u_m}$$

ولدينا $\quad a < u_m < b$

يعني $\quad -b < -u_m < -a$

$a - u_m < 0$ و $b - u_m > 0$

وبما أن $\quad 0 < a < a+b-u_m < b$

فإن $\quad \frac{(b-u_m)(a-u_m)}{a+b-u_m} < 0$

إذن $\quad u_{m+1} < u_m$

ومنه فإن $(u_m)_m$ متتالية تناقصية

(3) 1- بين أن $(V_m)_m$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{a}{b}$

لدينا

$$V_{m+1} = \frac{u_{m+1} - a}{u_{m+1} - b}$$

$$= \frac{\frac{ab}{a+b-u_m} - a}{\frac{ab}{a+b-u_m} - b}$$

$$= \frac{ab - a^2 - ab + au_m}{ab - ab - b^2 + bu_m}$$

$$= \frac{a(a-u_m)}{b(b-u_m)}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{u_m - a}{u_m - b}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot V_m$$

إذن $(V_m)_m$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{a}{b}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

ب- لنبين أن $u_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

من أجل $n = 0$

لدينا $u_0 = \frac{a \cdot b^0 + b \cdot a^0}{a^0 + b^0}$

$u_0 = \frac{a+b}{2}$ صحيحة

نفترض أن : $u_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

ونبين أن : $u_{n+1} = \frac{ab^{n+1} + ba^{n+1}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$

لدينا $u_{n+1} = \frac{ab}{a+b-u_n}$

$= \frac{ab}{a+b - \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}}$

$= \frac{ab}{(a+b)(a^n+b^n) - ab^n - ba^n}{a^n+b^n}$

$= \frac{ab(a^n+b^n)}{a \cdot a^n + ab^n + ba^n + b \cdot b^n - ab^n - ba^n}$

$= \frac{b \cdot a^{n+1} + ab^{n+1}}{a^{n+1} + b^{n+1}}$

وحسب مبدأ الترجع فإن

$u_n = \frac{ab^n + ba^n}{a^n + b^n}$

التمرين ⑤ :

① أحسب u_2 و u_3

لدينا

$u_2 = 5u_1 - 6u_0$

$= 5 \times 1 - 6 \times 2$

$= 5 - 12$

$u_2 = -7$

$u_3 = 5u_2 - 6u_1$

$= 5 \times (-7) - 6 \times 1$

$= -35 - 6$

$u_3 = -41$

② بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية يحدد أساسها

نضع $V_n = u_{n+1} - 3u_n$

لدينا

$V_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1}$

$= 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1}$

$= 2u_{n+1} - 6u_n$

$= 2(u_{n+1} - 3u_n)$

$= 2 \cdot V_n$

إذن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = 2$

من إنجاز التلميذ ياسر السباري

التمرين 4 :

(3) ب- لدينا

$V_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$

$V_n u_n - b V_n = u_n - a$

$V_n u_n - u_n = b V_n - a$

$u_n(V_n - 1) = b V_n - a$

$u_n = \frac{b V_n - a}{V_n - 1}$

وعلما أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{a}{b}$ و $V_0 = -1$

فإن : $V_n = V_0 q^n$

$V_n = -\left(\frac{a}{b}\right)^n$

وعليه :

$u_n = \frac{-b\left(\frac{a}{b}\right)^n - a}{-\left(\frac{a}{b}\right)^n - 1}$

$u_n = \frac{-\frac{a^n b}{b^n} - \frac{ab^n}{b^n}}{-\frac{a^n}{b^n} - \frac{b^n}{b^n}}$

$u_n = \frac{-a^n b - ab^n}{-a^n - b^n}$

$u_n = \frac{a^n b + ab^n}{a^n + b^n}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma