

المتتاليات - الحساب المثلثي حلول مقترحة	السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	استعدادا لاجتياز فروضك
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان		
تمرين 1 : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2^n u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n, \quad \begin{cases} u_0 = 0; \quad u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \quad ; n \geq 0 \end{cases}$ لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2} u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n - \frac{1}{2} u_{n+1} = \frac{1}{2} u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n = \frac{1}{2} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \right) = \frac{1}{2} v_n$ إذن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول هو $v_0 = u_1 - \frac{1}{2} u_0 = 1$ منه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$		
حسب السؤال السابق نستنتج أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n$ لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} - w_n = 2^{n+1} u_{n+1} - 2^n u_n = 2^{n+1} \left(u_{n+1} - \frac{1}{2} u_n \right) = 2^{n+1} \times \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2$ إذن $(w_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول هو $w_0 = 2^0 \times u_0 = 0$ منه : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = w_0 + r n = 2n$		
بما أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = 2^n u_n$ فإن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{w_n}{2^n} = \frac{2n}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$		
لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$ منه : $\begin{cases} u_2 = u_1 - \frac{1}{4} u_0 \\ u_3 = u_2 - \frac{1}{4} u_1 \\ u_4 = u_3 - \frac{1}{4} u_2 \\ \dots = \dots \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n \end{cases}$ بجمع هذه المتساويات طرفا بطرف وبعد الاختزال نجد : $u_{n+2} = u_1 - \frac{1}{4} \sum_{k=0}^n u_k$ بالتالي : $\sum_{k=0}^n u_k = 4(u_1 - u_{n+2}) = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$		
نعلم أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n}{2^{n-1}}$ و $\sum_{k=0}^n u_k = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$ إذن : $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^{k+1}} = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$ منه : $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \times \frac{k}{2^k} = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$ منه : $\frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} \right) = 4 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$ بالتالي : $\sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 8 \left(1 - \frac{n}{2^{n+1}} \right)$		

تمارين 2 : $A(x) = \cos(3x) + \sin(2x) - \cos(x)$					
$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) \\ &= \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) \\ &= (2\cos^2(x) - 1)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\sin(x) \\ &= \cos(x)(2\cos^2(x) - 1 - 2\sin^2(x)) \\ &= \cos(x)(2\cos^2(x) - 1 - 2(1 - \cos^2(x))) \\ \cos(3x) &= \cos(x)(4\cos^2(x) - 3)\end{aligned}$				1 لدينا :	
$\begin{aligned}A(x) &= \cos(3x) + \sin(2x) - \cos(x) \\ &= \cos(x)(4\cos^2(x) - 3) + 2\sin(x)\cos(x) - \cos(x) \\ &= \cos(x)(4\cos^2(x) - 3 + 2\sin(x) - 1) \\ &= \cos(x)(4(1 - \sin^2(x)) - 3 + 2\sin(x) - 1) \\ &= \cos(x)(2\sin(x) - 4\sin^2(x)) \\ A(x) &= 2\sin(x)\cos(3x)(1 - 2\sin(x))\end{aligned}$				2 لدينا :	
$A(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(3x)(1 - 2\sin(x)) = 0 \Leftrightarrow \left(\sin(x) = 0 \text{ ou } \cos(3x) = 0 \text{ ou } \sin(x) = \frac{1}{2} \right)$ $A(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = kp / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 3x = \frac{p}{2} + kp / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \\ x = \frac{p}{6} + 2kp / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = p - \frac{p}{6} + 2kp / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$ $A(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} x = kp / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{p}{6} + \frac{kp}{3} / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } \\ x = \frac{p}{6} + 2kp / k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = \frac{5p}{6} + 2kp / k \in \mathbb{Z} \end{array} \right)$				3	
نعلم أن : $\forall x \in]0;p[\sin(x) > 0$ $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(3x)(1 - 2\sin(x)) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(3x)(1 - 2\sin(x)) \geq 0$ منه : $A(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos(3x)(2\sin(x) - 1) \leq 0 \Leftrightarrow \cos(3x)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right) \leq 0$ لدينا : $x \in]0;p[\Leftrightarrow 3x \in]0;3p[$ منه : $\begin{cases} \cos(3x) \geq 0 \\ 3x \in]0;3p[\end{cases} \Leftrightarrow 3x \in \left[0, \frac{p}{2}\right] \cup \left[\frac{3p}{2}, \frac{5p}{2}\right] \Leftrightarrow x \in \left[0, \frac{p}{6}\right] \cup \left[\frac{p}{2}, \frac{5p}{6}\right]$ $\begin{cases} \sin(x) - \frac{1}{2} \geq 0 \\ x \in]0;p[\end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{p}{6}, \frac{5p}{6}\right] \text{ و}$				4	
x	0	$\frac{p}{6}$	$\frac{p}{2}$	$\frac{5p}{6}$	p
$\cos(3x)$	+	-	+	-	
$\sin(x) - \frac{1}{2}$	-	+	+	-	
$\cos(3x)\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\right)$	-	-	+	+	
$S = \left[\frac{p}{2}; p\right] \text{ : بالتالي}$					

تمرين 3 : ABC مثلث حيث : $(\sin \hat{A})^2 = (\sin \hat{B})^2 + (\sin \hat{C})^2$

نعلم أن : $\frac{\sin \hat{A}}{BC} = \frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB}$ نضع : $\frac{\sin \hat{A}}{BC} = k$ منه : $k > 0$ (لأن : $0 < \hat{A} < \pi$)

ومنه أيضا : $\frac{\sin \hat{B}}{AC} = k$ و $\frac{\sin \hat{C}}{AB} = k$

$(\sin \hat{A})^2 = (\sin \hat{B})^2 + (\sin \hat{C})^2 \Rightarrow (k BC)^2 = (k AC)^2 + (k AB)^2 \Rightarrow k^2 BC^2 = k^2 AC^2 + k^2 AB^2$
 $(\sin \hat{A})^2 = (\sin \hat{B})^2 + (\sin \hat{C})^2 \Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2$ الآن :

إذن حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية فإن ABC قائم الزاوية في A