

التمرين الأول

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3 - U_n} \end{cases} \quad \text{لتكن } (U_n)_n \text{ متتالية عددية معرفة ب:}$$

1. بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 < U_n < 2$
2. تحقق أن  $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$  و أدرس رتبة المتتالية  $(U_n)_n$
3. نضع  $V_n = \frac{2 - U_n}{1 - U_n}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ 
  - أ. بين أن  $(V_n)_n$  متتالية هندسية وأحسب  $V_n$  بدلالة  $n$
  - ب. استنتج الحد العام  $U_n$  بدلالة  $n$
4. لكل عدد طبيعي غير منعدم  $n$  نضع :  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n} U_p$ 
  - أ. بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - 1 \leq \frac{2}{3}(U_n - 1)$
  - ب. أثبت أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n - 1 \leq \frac{1}{2} \left( \frac{2}{3} \right)^n$
  - ج. استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 + \frac{1}{n} \leq S_n \leq 1 + \frac{5}{2n} - \frac{1}{n} \left( \frac{2}{3} \right)^n$

التمرين الثاني

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \end{cases} \quad \text{لتكن } (U_n)_n \text{ متتالية عددية معرفة ب:}$$

1. بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad -1 < U_n \leq 0$
2. أدرس رتبة المتتالية  $(U_n)_n$
3. نضع  $V_n = \frac{1}{1 + U_n}$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$ 
  - أ. بين أن  $(V_n)_n$  متتالية حسابية وأحسب  $V_n$  بدلالة  $n$
  - ب. حدد الحد العام  $U_n$  بدلالة  $n$
4. لكل عدد طبيعي غير منعدم  $n$  نضع :  $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k=n} V_k$  . بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \left| S_n - \frac{1}{4} \right| \leq \frac{3}{n}$

التمرين الثالث

نعتبر المتتالية  $(U_n)_n$  المعرفة بما يلي :  $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{3^k}$  لكل عدد طبيعي غير منعدم  $n$

- 1) أحسب  $U_1$  ;  $U_2$
- 2) أ. بين بالترجع أن  $p \leq \left( \frac{3}{2} \right)^p$   $(\forall p \geq 2)$
- ب. استنتج أن المتتالية  $(U_n)_n$  مكبورة بالعدد 1