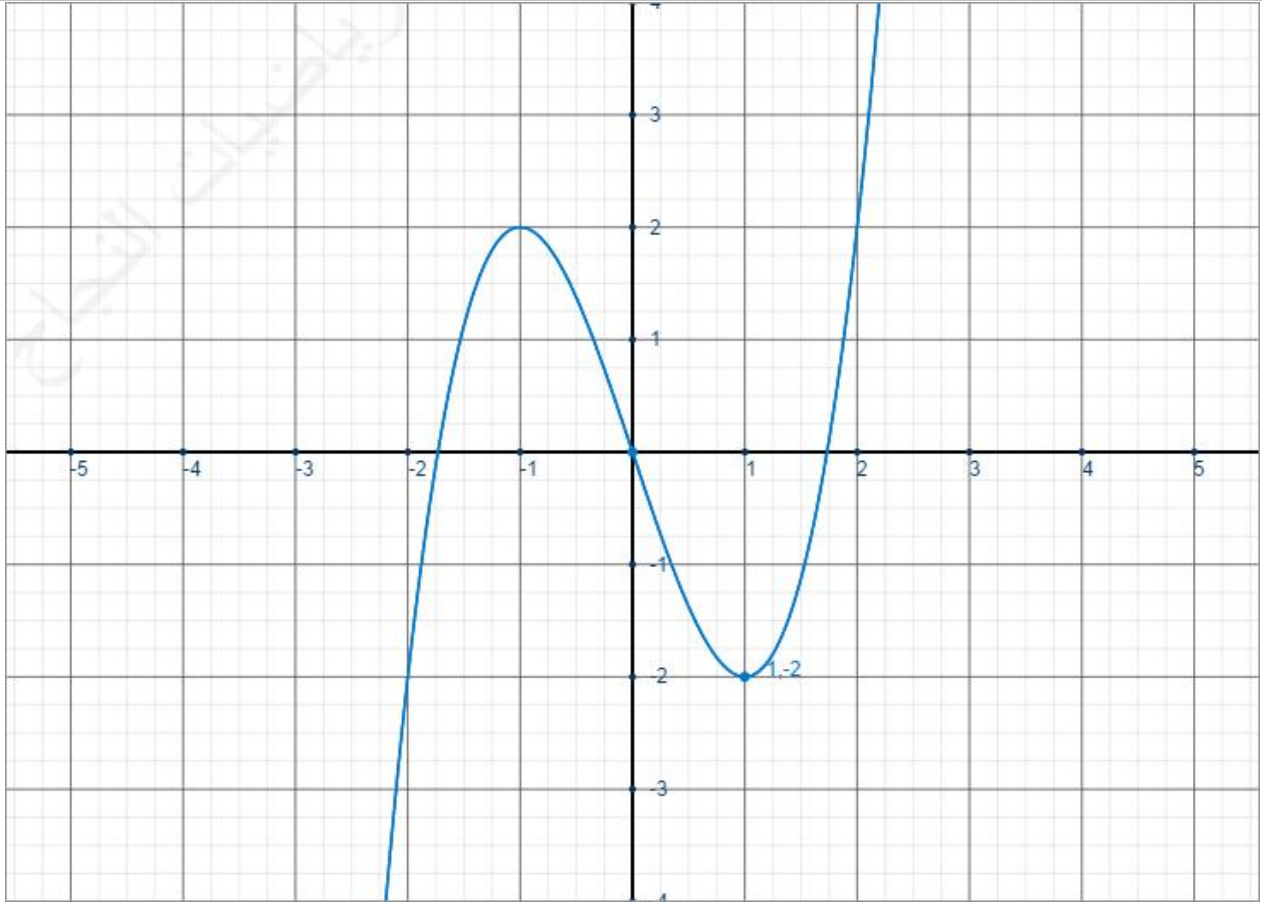


السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	عموميات حول الدوال نموذج 1 - حلول مقترحة	استعدادا لاجتياز فروضك
فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي - مدة الانجاز ساعتان		
تمرين 1 : $f(x) = x^3 - 3x$ لدينا لكل $x \neq y$: $f(x) - f(y) = (x^3 - 3x) - (y^3 - 3y) = x^3 - y^3 - 3x + 3y = (x - y)(x^2 + xy + y^2) - 3(x - y)$ $f(x) - f(y) = (x - y)[x^2 + xy + y^2 - 3]$ بالتالي : $\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = x^2 + xy + y^2 - 3$	ليكن x و y عددين مختلفين من $[1, +\infty[$ ، لدينا : $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ y^2 \geq 1 \\ xy \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + xy \geq 3 \Rightarrow T(x, y) \geq 0$ ليكن x و y عددين مختلفين من $[-1, 1]$ ، لدينا : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \\ xy \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ y^2 \leq 1 \\ -1 \leq xy \leq 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + xy \leq 3 \Rightarrow T(x, y) \leq 0$ ليكن x و y عددين مختلفين من $]-\infty; -1]$ ، لدينا : $\begin{cases} x \leq -1 \\ y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x \geq 1 \\ -y \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 1 \\ y^2 \geq 1 \\ xy \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + xy \geq 3 \Rightarrow T(x, y) \geq 0$ إذن f تزايدية على $[1, +\infty[$ و $]-\infty; -1]$ و تناقصية على $[-1, 1]$	لدينا : $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$ بالتالي (Cf) يقطع محور الأفاصيل في النقط : $O(0; 0)$ و $A(\sqrt{3}; 0)$ و $B(-\sqrt{3}; 0)$



4

لدينا : $x^3 - 3x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = m - 1$

- إذا كان : $m - 1 < -2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا
- إذا كان : $m - 1 = -2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلين بالضبط
- إذا كان : $-2 < m - 1 < 2$ فالمعادلة السابقة تقبل ثلاث حلول بالضبط
- إذا كان : $m - 1 = 2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلين بالضبط
- إذا كان : $m - 1 > 2$ فالمعادلة السابقة تقبل حلا وحيدا

5

باستعمال نتائج السؤال 2، أوجد معللا جوابك جدول تغيرات الدوال التالية :

لدينا الدالة $p: x \rightarrow |x|^3 - 3|x|$ دالة زوجية وتساوي $f(x)$ على $[0; +\infty[$

إذن لها نفس رتبة f على $[0; +\infty[$ ولها رتبة معاكسة في $]-\infty; 0]$

وبكون $g(x) = p(x) + 1$ فإن g تزايدية على $[1, +\infty[$ و تناقصية على $[0, 1]$ و g تزايدية على $[-1, 0]$ و تناقصية على $]-\infty; -1]$

بما أن $\frac{1}{5} > 0$ فالدالة $x \rightarrow \frac{x^3 - 3x}{5}$ لها نفس تغيرات f و بالتالي h $x \rightarrow \frac{x^3 - 3x}{5}$ لها نفس تغيرات f

6

الدالة $h(x) = |f(x)|$ إذن $h(x) = f(x)$ عندما يكون $f(x) \geq 0$ أي عندما يكون : $x \in [-\sqrt{2}; 0] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$ و $h(x) = -f(x)$ و

إذن h تناقصية على $]-\infty; -\sqrt{2}]$ و تزايدية على $[-\sqrt{2}, -1]$ و تناقصية على $[-1, 0]$ و تزايدية على $[0, 1]$ و h تناقصية على $[1, \sqrt{2}]$ و تزايدية على $[\sqrt{2}; +\infty[$

7	$p(x) = f(\sqrt{x}) + 1$ ، $Dp = [0; +\infty[$ على $[0; +\infty[$ الدالة $m(x) = \sqrt{x}$ تزايدية و $m([0; +\infty[) = [0; +\infty[$ إذن ل p نفس تغيرات f على $[0; +\infty[$ $s(x) = \frac{1}{x}$ حيث $q(x) = s(f(x)) = s \circ f(x)$ ، $Dq = IR - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$ بما أن s تناقصية على $]0; +\infty[$ و على $]-\infty; 0[$ فإن ل $q(x)$ عكس تغيرات $f(x)$ على Dq في هذا السؤال اختصرنا طريقة الجواب لضيق الوقت.
و	تمرين 2 : نعتبر الدالتين $g(x) = 2x^2 - 1$ و $f(x) = 4x^3 - 3x$ $f \circ g(x) = 4(g(x))^3 - 3g(x) = 4(2x^2 - 1)^3 - 3(2x^2 - 1) = 4((2x^2)^3 - 3(2x^2)^2 + 3(2x^2) - 1) - 6x^2 + 3$ $f \circ g(x) = 4(8x^6 - 12x^4 + 6x^2 - 1) - 6x^2 + 3$ $f \circ g(x) = 32x^6 - 48x^4 + 24x^2 - 4 - 6x^2 + 3$ $f \circ g(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ و $g \circ f(x) = 2(4x^3 - 3x)^2 - 1 = 2(16x^6 - 24x^4 + 9x^2) - 1$ $g \circ f(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$ بالتالي : $\forall x \in IR \quad g \circ f(x) = f \circ g(x)$
1	تمرين 3 : نعتبر الدالة $f(x) = 1 + \sqrt{x - 4E\left(\frac{x}{4}\right)}$ نعلم أن : $\forall x \in IR \quad \frac{x}{4} \geq E\left(\frac{x}{4}\right)$ منه $\forall x \in IR \quad x \geq 4E\left(\frac{x}{4}\right)$ منه $\forall x \in IR \quad x - 4E\left(\frac{x}{4}\right) \geq 0$ بالتالي : $Df = IR$
2	لدينا : $\forall x \in IR \quad f(x+4) = 1 + \sqrt{x+4 - 4E\left(\frac{x+4}{4}\right)} = 1 + \sqrt{x+4 - 4E\left(\frac{x}{4} + 1\right)}$ بالتالي $\forall x \in IR \quad f(x+4) = 1 + \sqrt{x+4 - 4E\left[\left(\frac{x}{4}\right) + 1\right]} = 1 + \sqrt{x+4 - 4E\left(\frac{x}{4}\right) - 4}$ دورية أحد أدوارها 4 . $\forall x \in IR \quad f(x+4) = f(x)$
3	لدينا : $\forall x \in IR \quad \sqrt{x - 4E\left(\frac{x}{4}\right)}$ إذن : $\forall x \in IR \quad f(x) \geq 1$ نعلم أن $\forall x \in IR \quad \frac{x}{4} < E\left(\frac{x}{4}\right) + 1$ منه : $\forall x \in IR \quad x < 4E\left(\frac{x}{4}\right) + 4$ منه : $\forall x \in IR \quad x - 4E\left(\frac{x}{4}\right) < 4$ منه : $\forall x \in IR \quad \sqrt{x - 4E\left(\frac{x}{4}\right)} < 2$ منه : $\forall x \in IR \quad f(x) < 3$ بالتالي : $\forall x \in IR \quad 1 \leq f(x) < 3$