



.01

ندرس تباليغة f :

لدينا : $(\forall x, x' \in E : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

ليكن x و x' من \mathbb{R} حيث :

$$f(x) = f(x') \Rightarrow \sin x = \sin x'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x' + 2k\pi \\ x = \pi - x' + 2k\pi \end{cases}$$

ومنه : f غير تباليغ.

مثال مضاد:

$$x' = \frac{\pi}{4} + 6\pi \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4} + 6\pi\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\pi - \frac{\pi}{4} + 6\pi\right)$$

ولكن : $\pi - \frac{\pi}{4} + 6\pi \neq \frac{\pi}{4}$

خلاصة : f غير تباليغ.

ندرس شمولية f :

نأخذ 2 - من \mathbb{R} نبحث هل له سابق x من \mathbb{R}

$$f(x) = -2$$

و منه : $\sin x = -2$

و هذا غير ممكن لأن : $-1 \leq \sin x \leq 1$

ومنه : f غير شامل.

خلاصة : f غير شامل.

نحدد : 2

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

لدينا: $B \in \mathbb{N}^2$

ليكن $(n, p) \in \mathbb{N}^2$

$$(n, p) \in g^{-1}(\{3\}) \Leftrightarrow g^{-1}((n, p)) \in \{3\}$$

$$\Leftrightarrow g((n, p)) = 3$$



تصحيح الفرض المحروس 1 - 2014/2015

$$\Leftrightarrow n+p=3$$

$$\Leftrightarrow (n,p) \in \{(1,2), (2,1), (0,3), (3,0)\}$$

خلاصة: $g^{-1}(\{3\}) = \{(1,2), (2,1), (0,3), (3,0)\}$

3. نبين أن: h تقابلية

لكي يكون h تقابلية :

$$f \text{ تقابلية} \Leftrightarrow (\forall a' \in F, \exists! a \in E : a' = f(a))$$

مع $F = \mathbb{R}^2$ و $E = \mathbb{R}^2$ و $a' = (x', y')$ و $a = (x, y)$

لهذا نبين أن المعادلة التالية تقبل حل وحيد :

$$h((x,y)) = (x',y') \Leftrightarrow (x+3y, x-y) = (x',y')$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=x' \\ x-y=y' \end{cases}$$

ومنه نحل النظمة : $\begin{cases} x+3y=x' \\ x-y=y' \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \text{حسب } \Delta :$$

ومنه نظمة هي نظمة كرامير تقبل حل وحيد.

وبالتالي h تقابلية.

خلاصة: h تقابلية من \mathbb{R}^2 إلى \mathbb{R}^2 .

3. نحدد $h^{-1}(\mathbb{R}^2)$ و $h(\mathbb{R}^2)$

بما أن h تقابلية فإن: $h^{-1}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$ و $h(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$

.02

1. قيمة حقيقة العبارة التالية:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1,2\}, \frac{1}{(n-2)(n-1)n} \leq \frac{1}{n^3}$$

لدينا:

$$n \leq n \Rightarrow n-1 \leq 0 \Rightarrow n-1 \leq n \quad \text{و} \quad -2 \leq 0 \Rightarrow n-2 \leq n$$

ومنه ضرب طرف بطرف: $(n-2) \times (n-1) \times n \leq n \times n \times n$ (لأن الأعداد موجبة)

إذن: $(n-2) \times (n-1) \times n \leq n^3$

فإن: $\frac{1}{(n-2) \times (n-1) \times n} \geq \frac{1}{n^3}$

وبالتالي: العبارة خاطئة.

خلاصة: العبارة خاطئة.



تصحيح الفرض المحروس 1 - 2014/2015

2. نبين أن : $\forall p \in \mathbb{N}^*, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{p}$

نأخذ : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 1 \leq k \leq p$

ومنه :

$$1 \leq k \leq p \Rightarrow 1 \leq \sqrt{k} \leq \sqrt{p}$$

$$\Rightarrow \sqrt{p} \leq \sqrt{k} \times \sqrt{p} \leq p (\times \sqrt{p})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \leq \frac{1}{\sqrt{k} \times \sqrt{p}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq \underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \dots + \frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1} \times \sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{p}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p} \times \sqrt{p}} \geq p \times \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p}} \left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \right] \geq 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \right] \geq \sqrt{p}$$

خلاصة : $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sqrt{p}$

3. نبين أن المعادلة (E) ليس لها حل :

لدينا :

$$x \geq -1 \Rightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ x + 10 \geq 9 \\ x + 100 \geq 99 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} \geq 0 \\ \sqrt{x+10} \geq 3 \\ \sqrt{x+100} \geq \sqrt{99} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} \geq 3 + \sqrt{99} > 12 ; \quad (\sqrt{99} > 9)$$

وبالتالي : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} \neq 12$



.03

نستدل بالخلاف أن: $n+1$ لا يقسم q

نفترض أن: q يقسم $n+1$ إذن: $n+1 = qk'$

ونعلم أن: $n = qk$

ومنه: $qk + 1 = qk'$

إذن: $1 = qk' - qk$

فإن: $1 = q \times (k' - k)$

وبالتالي: $1 = q$ وهذا غير ممكن إذن ما فترضناه كان خاطئا

ومنه: $n+1$ لا يقسم q

خلاصة: $n+1$ لا يقسم q

نبين أن: العدد $A_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$ يقبل القسمة على 225

نتحقق أن العلاقة A_n صحيحة لـ $n = 0$:

لدينا: $A_0 = 4^{2n+2} - 15n - 16$

$$A_0 = 4^{2 \times 0 + 2} - 15 \times 0 - 16$$

$$A_0 = 4^2 - 0 - 16$$

$$A_0 = 16 - 16$$

$$A_0 = 0$$

وبالتالي: العلاقة A_n صحيحة لـ $n = 0$.

نفترض أن العلاقة A_n صحيحة إلى n :

أي أن: العدد $A_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$ يقبل القسمة على 225 أي $A_n = 4^{2n+2} - 15n - 16 = 15k$ مع $k \in \mathbb{N}$ (معطيات الترجم).

نبين أن العلاقة A_{n+1} صحيحة لـ $n+1$:

أي نبين أن: $A_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$

$$A_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 15(n+1) - 16$$

$$A_{n+1} = 4^{2n+2} \times 4^2 - 15n - 15 - 16$$

$$A_{n+1} = 4^{2n+2} \times (15+1) - 15n - 15 - 16$$

$$A_{n+1} = (4^{2n+2} \times 1 - 15n - 16) + 4^{2n+2} \times 15 - 15$$

$$A_{n+1} = \underbrace{(4^{2n+2} - 15n - 16)}_{15k} + 15 \times (4^{2n+2} - 1)$$

$$(1) : A_{n+1} = \underbrace{(4^{2n+2} - 15n - 16)}_{\text{donnée reçue.}} + 15 \times (4^{2n+2} - 1)$$

ومنه: $A_{n+1} = 225k + 15 \times (4^{2n+2} - 1)$

ومنه ثبت بالترجم أن: $B_n = 4^{2n+2} - 1$ يقبل القسمة على 15.



تصحيح الفرض المحروس 1 - 2014/2015

نتحقق أن العلاقة B_n صحيحة لـ $n = 0$:

$$B_0 = 4^{2n+2} - 1 \quad \text{لدينا: } -1$$

$$B_0 = 4^{2 \times 0 + 2} - 1 = 15 \quad \text{أي: } 15$$

وبالتالي: العلاقة B_n صحيحة لـ $n = 0$.

نفترض أن العلاقة B_n صحيحة إلى n :

أي أن: العدد $-1 = 4^{2n+2} - 1 = 15k'$ أي $B_n = 4^{2n+2} - 1 = 15k$ مع $k \in \mathbb{N}$ (معطيات الترجع).

نبين أن العلاقة B_{n+1} صحيحة لـ $n+1$:

$$B_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 1 \quad \text{أي نبين أن: } -1$$

$$B_{n+1} = 4^{2(n+1)+2} - 1$$

$$B_{n+1} = 4^{2n+2} \times 4^2 - 1$$

$$B_{n+1} = 4^{2n+2} \times (15+1) - 1$$

$$B_{n+1} = 4^{2n+2} \times 15 + \underbrace{4^{2n+2} - 1}_{15k'} \quad \text{أي } B_{n+1} = 15[4^{2n+2} + k']$$

ومنه: B_{n+1} يقبل القسمة على 15 (2)

حسب (1) و (2) إذن: A_{n+1} يقبل القسمة على 15

خلاصة: العدد $4^{2n+2} - 15n - 16 = A_n$ يقبل القسمة على 225

هناك طريقة ثانية

.04

1. نكتب بالتفصيل:

$$1 \leq 3n \leq 9 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq n \leq 3$$

ومنه: $n \in \{1, 2, 3\}$

حالة أولى: $n = 1$ و نعلم أن: $1 \leq p \leq 3n$

إذن: $1 \leq p \leq 3 \times 1$

ومنه: $1 \leq p \leq 3$

وبالتالي: $p \in \{1, 2, 3\}$

• نأخذ: $n = 1$ و $p \in \{1, 2, 3\}$ إذن:

حالة ثانية: $n = 2$ و نعلم أن: $1 \leq p \leq 3n$

إذن: $1 \leq p \leq 3 \times 2$

ومنه: $1 \leq p \leq 6$

وبالتالي: $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

• نأخذ: $n = 2$ و $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ إذن:



تصحيح الفرض المحروس ١ - ٢٠١٤/٢٠١٥

حالة ثلاثة: $n = 3$ و نعم أن: $1 \leq p \leq 3n$

إذن: $1 \leq p \leq 3 \times 3$

ومنه: $1 \leq p \leq 9$

وبالتالي : $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

▪ نأخذ: $n = 3$ و $\{p\}$ إذن: $p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$$F = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, 3 \right\}$$

2

أ- نبين أن: $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \setminus (A \cap C) &= (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} \\ &= A \cap B \cap \overline{A \cap C} \\ &= A \cap \overline{A \cap C} \cap B \\ &= (A \cap \overline{A \cap C}) \cap B \\ &= (A \cap (\overline{A} \cup \overline{C})) \cap B \\ &= ((A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{C})) \cap B \\ &= (\emptyset \cup (A \cap \overline{C})) \cap B \\ &= (A \cap \overline{C}) \cap B \\ &= A \cap \overline{C} \cap B \\ &= A \cap B \cap \overline{C} \\ &= A \cap (B \cap \overline{C}) \\ &= A \cap (B \setminus C) \end{aligned}$$

خلاصة: $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = A \cap (B \setminus C)$

ب- نبين أن: $(B \setminus C \subset A \text{ و } C \setminus D \subset A) \Rightarrow B \setminus D \subset A$

. $x \in A$: $x \in B \setminus D$ نبين أن:

. $x \in B$ إذن: $x \in B \setminus D$ و

حالة أولى: $x \in C$

لدينا: $x \in C$ و $x \notin D$ إذن: $x \in C \setminus D$

خلاصة 1: $B \setminus D \subset A$

حالة ثانية: $x \notin C$

لدينا: $x \in B$ و $x \notin C$ إذن: $x \in B \setminus C$ ومنه: $x \in A$ (لأن $x \in B \setminus C$)

خلاصة 2: $B \setminus D \subset A$



تصحيح الفرض المحروس 1 - 2014/2015

في كلتا الحالتين : $B \setminus D \subset A$

$$(B \setminus C \subset A \text{ و } C \setminus D \subset A) \Rightarrow B \setminus D \subset A$$

.05

1. نبين أن : $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

لكي نبين: $x+y \geq 2\sqrt{xy}$ يجب أن نبين العلاقة تالية صحيحة :

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - 2\sqrt{xy} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

ومنه العلاقة صحيحة

- $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ و $x=a$ إذن: $y=b$

- $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ و $x=b$ إذن: $y=c$

- $a+c \geq 2\sqrt{ac}$ و $x=c$ إذن: $y=a$

ومنه ضرب جميع الأطراف :

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} \times 2\sqrt{ac} \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$$

وبالتالي: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

خلاصة: $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

.06

1. عدد أقطار المضلعات :

$d_6 = 9$ الشكل الثالث :

$d_5 = 5$

الشكل الثاني :

$d_4 = 2$

الشكل الأول :

2. الصيغة التحقق الجواب عن السؤال الأول هي: الصيغة الثانية :

3. نبين بالترجم :

نبين بالترجم أن عدد أقطار مضلع مدبب حيث عدد رؤوسه n هو $d_n = \frac{n \times (n-3)}{2}$

| مضلع مدبب عدد رؤوسه $n+1$ | مضلع مدبب عدد رؤوسه n |
|---------------------------|-------------------------|
| | |



تصحيح الفرض المحروس 1 - 2014/2015

نتحقق أن العلاقة صحيحة لـ $n = 4$:

$$d_n = \frac{n \times (n-3)}{2}$$

$$d_4 = \frac{4 \times (4-3)}{2} = 2 \quad \text{أي :}$$

وبالتالي: العلاقة صحيحة لـ $n = 0$.

نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n :

$$\text{أي أن: } d_n = \frac{n \times (n-3)}{2} \quad (\text{معطيات الترجمة}).$$

نبين أن العلاقة صحيحة لـ $n+1$:

$$d_{n+1} = \frac{(n+1) \times (n-2)}{2} \quad \text{أي نبين أن :}$$

الطريقة 1 :

حسب السؤال السابق : لدينا العلاقة $d_{n+1} = n - 1 + d_n$

$$d_{n+1} = n - 1 + d_n \quad \text{إذن :}$$

$$(\text{حسب معطيات الترجمة}) \quad = n - 1 + \frac{n(n-3)}{2}$$

$$= \frac{2n - 2 + n(n-3)}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2} = \frac{n^2 - 1 - (n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n-1-1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

إذن العلاقة صحيحة لـ $n+1$.

الطريق 2 :

عندما المضلعل P_n نضيف له رأس A_{n+1} نحصل على مضلعل مدبب P_{n+1} له $n+1$ رأس

لدينا : n رأس سابقة (مضلعل مدبب عدد رؤوسه n) تعطي لنا $d_n = \frac{n \times (n-3)}{2}$ قطر حسب معطيات الترجمة . أما الرأس الذي

أضافنا سيرتبط بالرؤوس n السابقة بقطع عددها n قطعة حيث 2 ليست بقططر إذن عدد الأقطار التي أضيفت هي : $2 - n$ و لا

تنسى القطعة التي أصبحت قطر والتي كانت تربط الرأسين التي أضافنا بينهما الرأس A_{n+1} وبالتالي عدد الأقطار التي أضفت هو

n و منه عدد الأقطار للمضلعل المدبب P_{n+1} هو سيكون : $d_n + n - 1 = n - 1$ ومنه :

$$d_{n+1} = d_n + n - 1 = \frac{n \times (n-3)}{2} + n - 1 = \frac{n^2 - 3n + 2n - 2}{2} = \frac{n^2 - n - 2}{2}$$

$$= \frac{(n+1) \times (n-2)}{2}$$

$$\text{ومنه : } d_{n+1} = \frac{(n+1) \times (n-2)}{2}$$

وبالتالي العلاقة صحيحة لـ $n+1$

خلاصة: عدد أقطار مضلعل مدبب حيث عدد رؤوسه n هو

$$d_n = \frac{n \times (n-3)}{2}$$