هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات حلول مقترحة	سلسلة 3

التمارين مستخرجة من الكتاب المدرسي المفيد في الرياضيات ـ التحليل

تمرين 1 :

نضع: $S=\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2x_i\right|$ منه : $S=\left|\sum_{i=1}^{n}2\sin x_i\cos x_i\right|=2\left|\sum_{i=1}^{n}\sin x_i\cos x_i\right|$

و نعلم أن : $\forall (a_1,a_2,...,a_n)\in IR^n\ \forall (b_1,b_2,...,b_n)\in IR^n\quad \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\,b_i\right)^2$

إذن : $S^2=\left(2\left|\sum_{i=1}^{n}\sin x_i\cos x_i\right|\right)^2=4\left(\sum_{i=1}^{n}\sin x_i\cos x_i\right)^2\leq 4\left(\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\cos^2 x_i\right)$

و بما أن : $\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=a$ فإن : $\sum_{i=1}^{n}\cos^2 x_i=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\sin^2 x_i\right)=n-\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=n-a$

منه : $S^2\leq 4a(n-a)$ أي : $\boxed{S\leq 2\sqrt{a(n-a)}}$ (لأن : $S\geq 0$)

من جهة أخرى : بما أن : $0\leq a\leq n$ فإن : $0\leq\frac{a}{n}\leq 1$ إذن يوجد عدد حقيقي : α حيث $\sin(\alpha)=\sqrt{\frac{a}{n}}$

إذا أخذنا الأعداد x_i بحيث : $x_1=x_2=...=x_n=\alpha$

نجد أن هذه الأعداد تحقق شروط المسألة حيث أن : $\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i=\sum_{i=1}^{n}\sin^2\alpha=n\sin^2\alpha=n\frac{a}{n}=a$

$$S=\left|\sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha\right|=2\left|\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha\cos\alpha\right|=2n\sin\alpha\cos\alpha=$$

و هكذا نجد أن :

$$S=2n\sqrt{\frac{a}{n}}\left(\sqrt{1-\sin^2\alpha}\right)=2n\sqrt{\frac{a}{n}}\sqrt{1-\frac{a}{n}}=2n\sqrt{\frac{a}{n}}\sqrt{\frac{n-a}{n}}=2\sqrt{a(n-a)}$$

و هذا يعني أن القيمة القصوية للتعبير S هي : $2\sqrt{a(n-a)}$

المتفاوتة المستعملة تسمى متفاوتة **Cauchy-Schwarz**

تمرين 2 :

نضع : $x+y+z=p$ منه : $xyz=\frac{1}{p}$ ، منه :

$$S=(x+y)(y+z)=(p-z)(p-x)=p^2-px-pz+zx$$
$$S=p^2-p(x+z)+\frac{1}{py}=p^2-p(p-y)+\frac{1}{py}=py+\frac{1}{py}$$

و نعلم أن : $a+\frac{1}{a}\geq 2\quad\forall a>0$ (متفاوتة هامة) (ويكون التساوي إذا وفقط إذا كان $a=1$) إذن : $\boxed{S\geq 2}$

نأخذ : $x=z=1$ و $y=\sqrt{2}-1$ ، هذه القيم تحقق شروط المسألة : $xyz(x+y+z)=\left(\sqrt{2}-1\right)\left(1+\sqrt{2}\right)=1$

و هكذا : $S=\left(1+\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1+1\right)=2$ ، بالتالي القيمة الدنوية للتعبير S هي : 2

لاحظ أنه لايكفي أن نبرهن أن $S\geq 2$ لكي نبرهن أن 2 قيمة دنوية ، بل يجب أن نجد قيما تحقق $S=2$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تمرين 3 :

لدينا : $x+y+z=5$ منه : $xy+yz+zx=3$

إذن : $\begin{cases} x+y=5-z \\ xy=3-z(x+y) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x+y=5-z \\ xy=3-z(5-z) \end{cases}$ أي : $\begin{cases} x+y=5-z \\ xy=z^2-5z+3 \end{cases}$

إذن العددان x و y يوجدان إذا وفقط إذا كان للمعادلة $t^2-(5-z)t+(z^2-5z+3)=0$ حل على الأقل في IR

أي : $\Delta=(z-5)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0$

لدينا: $(z-5)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0 \Leftrightarrow z^2-10z+25-4z^2+20z-12\geq 0$

$\Leftrightarrow -3z^2+10z+13\geq 0 \Leftrightarrow 3z^2-10z-13\leq 0$

$\Delta=100+156=256 \Rightarrow z_1=\frac{10+16}{6}=\frac{13}{3}$ et $z_2=\frac{10-16}{6}=-1$

إذن : $(z-5)^2-4(z^2-5z+3)\geq 0 \Leftrightarrow z\in\left[-1,\frac{13}{3}\right] \Leftrightarrow -1\leq z\leq\frac{13}{3}$

بالتالي أكبر قيمة ممكنة لـ z هي $\frac{13}{3}$

لاحظ أننا عكس التمرين السابق لم نحتج أن نجد قيما ل x و y حيث يكون $z=\frac{13}{3}$ والسبب أننا استعملنا تكافؤا، لكن في التمرين السابق استعملنا استلزاما فقط، بمعنى أنه في حال الاستلزام فقط يتوجب التحقق من المنحى العكسي بإيجاد قيم تحقق القيم القصوية أو الدنوية.

نذكر أن زوج حل النظمة $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ هما حلا المعادلة $t^2-st+p=0$

تمرين 4 :

المعادلة $x^2-3px-p=0$ تقبل جذرين حقيقين مختلفين x_1 و x_2 إذا وفقط إذا كان : $\Delta=9p^2+4p>0$

في هذه الحالة لدينا : $x_1+x_2=3p$

لدينا : $A=\frac{p^2}{3px_1+x_2^2+3p}+\frac{3px_1+x_2^2+3p}{p^2}=\frac{p^2}{3px_1+3px_2+p+3p}+\frac{3px_1+3px_2+p+3p}{p^2}$

$A=\frac{p^2}{3p(x_1+x_2)+4p}+\frac{3p(x_1+x_2)+4p}{p^2}=\frac{p^2}{9p^2+4p}+\frac{9p^2+4p}{p^2}=\frac{p^2}{\Delta}+\frac{\Delta}{p^2}$

وبما أن : $\frac{p^2}{\Delta}>0$ فإن : $\frac{p^2}{\Delta}+\frac{\Delta}{p^2}\geq 2$ (نذكر بالمتفاوتة الهامة : $\forall a>0 \quad a+\frac{1}{a}\geq 2$)

ولدينا أيضا :

$\frac{p^2}{\Delta}+\frac{\Delta}{p^2}=2 \Leftrightarrow \frac{p^2}{\Delta}=1 \Leftrightarrow p^2=9p^2+4p \Leftrightarrow 8p^2+4p=0 \Leftrightarrow p(2p+1)=0 \Leftrightarrow p=0 \; ou \; p=\frac{-1}{2}$

القيمة : $p=\frac{-1}{2}$ تحقق شروط المسألة، حيث : $\Delta=9p^2+4p=9\times\frac{1}{4}-4\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}>0$

خلاصة: $A\geq 2$ و $p=\frac{-1}{2}\Rightarrow A=2$ ، إذن القيمة الدنوية للتعبير A هي 2

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تمرين 5 :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^k\left(1+\frac{b}{a}\right)^k}$$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{b}\right)\left(\frac{a+b}{a}\right)\right)^k}$$ إذن : $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ ، $y>0$ و $x>0$ نعلم أن لكل

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{\left(\frac{(a+b)^2}{ab}\right)^k}$$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\sqrt{4^k}$$

ونعلم أن : $(a+b)^2\geq 4ab$ إذن :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2\times 2^k$$

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k \geq 2^{k+1}$$

نأخذ : $a=b$ نجد :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k = 2^k+2^k = 2\times 2^k = 2^{k+1}$$

بالتالي : القيمة الدنوية للتعبير $\left(1+\frac{a}{b}\right)^k+\left(1+\frac{b}{a}\right)^k$ هي 2^{k+1}

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تمرين 6 :

$$S=\frac{x^2}{x+yz}+\frac{y^2}{y+zx}+\frac{z^2}{z+xy}$$

$$S=\frac{x(1-y-z)}{x+yz}+\frac{y(1-x-z)}{y+zx}+\frac{z(1-x-y)}{z+xy}$$

$$S=\frac{x-xy-xz}{x+yz}+\frac{y-xy-yz}{y+zx}+\frac{z-xz-yz}{z+xy}$$

$$S=\frac{x+yz-yz-xy-xz}{x+yz}+\frac{y+zx-zx-xy-yz}{y+zx}+\frac{z+xy-xy-xz-yz}{z+xy}$$

$$S=1-\frac{(yz+xy+xz)}{x+yz}+1--\frac{(yz+xy+xz)}{y+zx}+1-\frac{(yz+xy+xz)}{z+xy}$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{x+yz}+\frac{1}{y+zx}+\frac{1}{z+xy}\right)$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{1-y-z+yz}+\frac{1}{1-x-z+zx}+\frac{1}{1-x-y+xy}\right)$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{1}{(1-y)(1-z)}+\frac{1}{(1-z)(1-x)}+\frac{1}{(1-x)(1-y)}\right)$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{1-x+1-y+1-z}{(1-x)(1-y)(1-z)}\right)$$

$$S=3-(xy+yz+xz)\left(\frac{3-(x+y+z)}{(y+z)(x+z)(x+y)}\right)$$

لدينا : $x+y+z=1$ إذن :

$$S=3-2\,\frac{xy+yz+xz}{xy+yz+xz-xyz}$$

$$S=3-2\left(1+\frac{xyz}{xy+yz+xz-xyz}\right)$$

$$S=1-\frac{2}{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}-1}$$

من جهة أخرى نعلم أن : $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+y+z)\geq 9$ (حسب متفاوتة **Cauchy-Schwarz** **متفاوتة**

حيث: $(a_1=\sqrt{x}\ ;a_2=\sqrt{y}\ ;a_3=\sqrt{z}\ ;\ b_1=\frac{1}{\sqrt{x}};b_2=\frac{1}{\sqrt{y}}\ ;b_3=\frac{1}{\sqrt{z}}$

منه : $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9\ \Rightarrow\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-1\geq 8\Rightarrow\frac{1}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-}\leq\frac{1}{8}\Rightarrow\frac{-2}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-}\geq\frac{-1}{4}$

منه : $S\geq 1-\frac{1}{4}\geq\frac{3}{4}$ ، وبأخذنا : $x=y=z=\frac{1}{3}$ نجد أن : $x+y+z=1$ و $S=\frac{3}{4}$

بالتالي : القيمة الدنوية للتعبير S هي $\frac{3}{4}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma