

Exercise 1

تمرين 1

لدينا : $(E): y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$

$$y = 2x^2 + 5xy + 3y^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 5xy + 3y^2 - y = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 10xy + 6y^2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(2x + \frac{5}{2}y\right)^2 - \frac{25}{4}y^2 + 6y^2 - 2y = 0 \Leftrightarrow (4x + 5y)^2 - 25y^2 + 24y^2 - 8y = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 5y)^2 - y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow (4x + 5y)^2 - (y^2 + 8y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 5y)^2 - ((y + 4)^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow (4x + 5y)^2 - (y + 4)^2 = -16$$

$$\Leftrightarrow (4x + 6y + 4)(4x + 4y - 4) = -16 \Leftrightarrow (2x + 3y + 2)(x + y - 1) = -2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y + 2 = a \\ x + y - 1 = b \end{cases} / (a, b) \in \{(1; -2); (-1; 2); (2; -1); (-2; 1)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3b + 3 - 3x = a - 2 \\ y = b + 1 - x \end{cases} / (a, b) \in \{(1; -2); (-1; 2); (2; -1); (-2; 1)\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3b - a + 5 \\ y = b + 1 - x \end{cases} / (a, b) \in \{(1; -2); (-1; 2); (2; -1); (-2; 1)\}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \{(-2; 1); (12; -9); (0; 0); (10; -8)\}$$

بالتالي : $S = \{(-2; 1); (12; -9); (0; 0); (10; -8)\}$

Exercise 2

تمرين 2

باستعمال مبرهنة فيثاغورس نجد : $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$ منه : $c \geq \sqrt{2ab}$

$$\text{لدينا : } \left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) = 1 + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{c^2}{ab} = 1 + c\left(\frac{a+b}{ab}\right) + \frac{a^2 + b^2}{ab}$$

$$\text{و بما أن : } \frac{a^2 + b^2}{ab} \geq 2 \text{ و } c\left(\frac{a+b}{ab}\right) \geq 2\sqrt{3} \Rightarrow c(a+b) \geq 2\sqrt{2}ab \Rightarrow \begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ c \geq \sqrt{2ab} \end{cases}$$

$$\text{فإن : } \left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

يمكن استعمال متباينة « كوشي شوارتز » مباشرة : $\forall (x, y, a, b) \in \mathbb{R}^4 (x+y)(a+b) \geq (\sqrt{ax} + \sqrt{by})^2$

$$\text{ف نجد : } \left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq \left(1 + \frac{c}{\sqrt{ab}}\right)^2 \geq \dots$$

Exercise 3

تمرين 3

لدينا حسب المعطيات ($10 + k$ يمثل باقي قسمة a_k على 100)

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad a_k = 100q_k + (10 + k) \quad / q_k \in \mathbb{N}$$

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, 9\} \quad a_k^2 = 10000q_k^2 + 100 + k^2 + 2000q_k + 200kq_k + 20k$$

$$a_k^2 = 100a_k + 20k + k^2 \quad / a_k = (100q_k^2 + 1 + 20q_k + 2kq_k)$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k^2 = 100 \sum_{k=1}^9 a_k + 20 \sum_{k=1}^9 k + \sum_{k=1}^9 k^2 \quad / a_k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k^2 = 100 \sum_{k=1}^9 a_k + 20 \times 45 + 285 \quad / a_k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k^2 = 100 \sum_{k=1}^9 a_k + 1185 \quad / a_k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^9 a_k^2 = 100 \sum_{k=1}^9 a_k + 20 \times 45 + 285 \quad / a_k \in \mathbb{N}$$

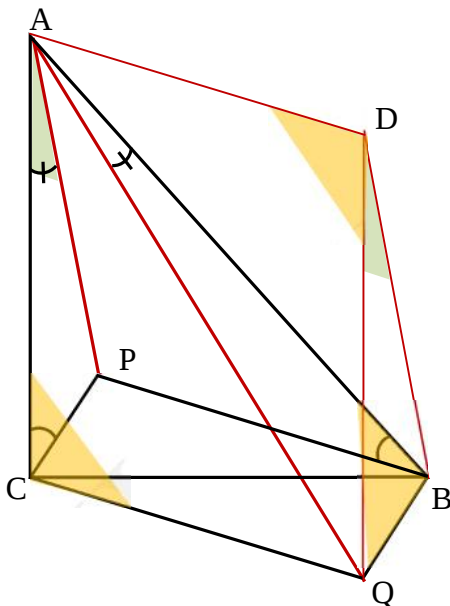
$$\sum_{k=1}^9 a_k^2 = 100 \left(\sum_{k=1}^9 a_k + 11 \right) + 85 \quad / a_k \in \mathbb{N}$$

و بما أن : $0 \leq 85 < 100$ فإن باقي القسمة الاقليدية ل $\sum_{k=1}^9 a_k^2$ على 100 هو 85 ، و هو ما يجيب عن السؤال.

يمكن أثناء الحساب استعمال الصيغ : $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ و $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercise 4

تمرين 4



نعتبر D صورة A بالإزاحة $T = t_{\vec{PB}}$

ولكون $PBQC$ متوازي أضلاع فإن :

$$T(Q) = D \quad \text{و} \quad T(P) = B \quad \text{و} \quad T(A) = D$$

$$(1) \quad \hat{PAC} = \hat{BDQ} \quad : \text{لدينا} \quad T(\hat{PAC}) = \hat{BDQ}$$

$$\hat{PCQ} = \hat{PBQ} \quad : \text{لدينا} \quad \text{متوازي أضلاع} \quad \text{منه}$$

$$(2) \quad \hat{ACQ} = \hat{ACP} + \hat{PCQ} = \hat{ABP} + \hat{PBQ} = \hat{ABQ}$$

$$(3) \quad \hat{ACQ} = \hat{ADQ} \quad : \text{لدينا} \quad \text{متوازي أضلاع} \quad \text{منه}$$

من (2) و (3) نستنتج أن : $\hat{ABQ} = \hat{ADQ}$ ، مما يعني أن الرباعي

$ADBQ$ دائري ، إذن : $\hat{BAQ} = \hat{BDQ}$ (4) (زاويتان محيطيتان

تحصران نفس القوس)

$$\boxed{\hat{PAC} = \hat{BAQ}} \quad : \text{من (1) و (4) نستنتج أن}$$

حل هذا التمرين من اقتراح أحد التلاميذ المشاركين في هذا الأولمبياد.