

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات حلول مقترحة	سلسلة 1
التمارين مستخرجة من الكتاب المدرسي المفيد في الرياضيات- التحليل		
تمرين 1 : لدينا : $2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 1 = 0$ لدينا : $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2 - 2 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2$ نضع : $y = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ منه : $2(y^2 - 2) - 3y - 1 = 0$ منه : $2y^2 - 3y - 5 = 0$ محددة هذه المعادلة هي : $\Delta = 9 + 40 = 49$ منه : $y = \frac{3+7}{4} = \frac{5}{2}$ أو $y = \frac{3-7}{4} = -1$ منه : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 5$ أو $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = -2$ نضع مرة أخرى : $x = \frac{a}{b}$ ، منه : $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ أو $x + \frac{1}{x} = -1$ منه : $2x^2 - 5x + 2 = 0$ أو $x^2 + x + 1 = 0$ بعد حل المعادلة الأولى نجد : $x = \frac{5+3}{4} = 2$ أو $x = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$ أما المعادلة الثانية فلا حل لها (المحددة سالبة) ، بالتالي : $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ أو $\frac{a}{b} = 2$		
تمرين 2 : لدينا : $ab + bc + ca = 1$ منه : $bc + ca = 1 - ab$ $(a^2 + 1)(b^2 + 1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = a^2b^2 + 1 - 2ab + a^2 + b^2 + 2ab$ $= (1 - ab)^2 + (a + b)^2$ $= (bc + ca)^2 + (a + b)^2$ $= (a + b)^2(c^2 + 1)$ ولدينا : منه : $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a + b)^2(c^2 + 1)^2$ منه : $\sqrt{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} = (a + b)(c^2 + 1)$ وحيث أن : a و b و c من Q فإن : $(a + b)(c^2 + 1) \in Q$ ، وهذا ينهي البرهان.		
تمرين 3 : لدينا : $\begin{cases} xy + 2x - y = 3 \\ 2x^2y - xy^2 = -4 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 2x - y = 3 - xy \\ xy(2x - y) = -4 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 2x - y = 3 - xy \\ xy(3 - xy) = -4 \end{cases}$ نضع : $t = xy$ منه : $t(3 - t) = -4$ أي : $t^2 - 3t - 4 = 0$ ، بعد حل المعادلة نجد : $t = 4$ أو $t = -1$ منه : $\begin{cases} 2x - y = 3 + 1 = 4 \\ xy = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2x - y = 3 - 4 = -1 \\ xy = 4 \end{cases}$ أي : $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ x(2x - 4) = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x(2x + 1) = 4 \end{cases}$ أي $\begin{cases} y = 2x - 4 \\ xy = -1 \end{cases}$ أو $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ xy = 4 \end{cases}$		

$$\begin{cases} y = 2x - 4 \\ 2x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x^2 + x - 4 = 0 \end{cases} \quad \text{أي}$$

حلا معادلة النظام الأولى هما : $\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$ و $\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$ والثانية : $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} y = \frac{-1-\sqrt{33}}{2} + 1 = \frac{1-\sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{-1-\sqrt{33}}{4} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} y = \frac{-1+\sqrt{33}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{33}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{33}}{4} \end{cases} \quad \text{منه :}$$

$$\begin{cases} y = 2 - \sqrt{2} - 4 = -\sqrt{2} - 2 \\ x = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} y = 2 + \sqrt{2} - 4 = \sqrt{2} - 2 \\ x = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{أو}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{-1+\sqrt{33}}{4}, \frac{1+\sqrt{33}}{2} \right); \left(\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, \frac{1-\sqrt{33}}{2} \right); \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} - 2 \right); \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2} - 2 \right) \right\} \quad \text{خلاصة:}$$

تمرين 4 :

$$S = \left[\frac{2}{k} \right] + \left[\frac{4}{k} \right] + \dots + \left[\frac{2(k-2)}{k} \right] + \left[\frac{2(k-1)}{k} \right] \quad \text{نضع :}$$

$$S = \left[\frac{2(k-1)}{k} \right] + \left[\frac{2(k-2)}{k} \right] + \dots + \left[\frac{4}{k} \right] + \left[\frac{2}{k} \right] \quad \text{منه :}$$

$$2S = \left(\left[\frac{2(k-1)}{k} \right] + \left[\frac{2}{k} \right] \right) + \left(\left[\frac{2(k-2)}{k} \right] + \left[\frac{4}{k} \right] \right) + \dots \quad \text{نجمع :}$$

$$\left[\frac{2(k-i)}{k} \right] + \left[\frac{2i}{k} \right] = 1 \quad \text{لنبين أنه مهما تكن } 1 \leq i \leq k-1 \quad \text{فإن :}$$

بالفعل : لدينا 3 حالات : $0 < 2i < k$ أو $2i = k$ أو $2i > k$

$$\text{حالة ① : } 0 < 2i < k : \text{ إذن : } 0 \leq \frac{2i}{k} < 1 \quad \text{منه : } \left[\frac{2i}{k} \right] = 0, \quad \text{ومن جهة أخرى:}$$

$$0 < 2i < k \Rightarrow -2k < 2i - 2k < -k \Rightarrow 2k > 2k - 2i > k \Rightarrow 2 > \frac{2(k-i)}{k} > 1 \Rightarrow \left[\frac{2(k-i)}{k} \right] = 1$$

$$\left[\frac{2(k-i)}{k} \right] + \left[\frac{2i}{k} \right] = 1 \quad \text{منه :}$$

حالة ② : $2i = k$: هذه الحالة غير ممكنة، لأن k عدد فردي

حالة ③ : $2i > k$

$$\text{إذن : } \frac{2i}{k} > 1 \quad \text{وبما أن : } 1 \leq i \leq k-1 \quad \text{فإن : } i < k \quad \text{منه } \frac{2i}{k} < 2 : \text{ منه } 1 < \frac{2i}{k} : \text{ منه : } \left[\frac{2i}{k} \right] = 1$$

$$2i > k \Rightarrow 2i - 2k > -k \Rightarrow 2(k-i) < k \Rightarrow \frac{2(k-i)}{k} < 1 \quad \text{ومن جهة أخرى:}$$

$$\text{وحيث أن : } \frac{2(k-i)}{k} \geq 0 \text{ فإن : } 0 \leq \frac{2(k-i)}{k} < 1 \text{ ، منه : } \left\lfloor \frac{2(k-i)}{k} \right\rfloor = 1$$

$$\text{منه : } \left\lfloor \frac{2(k-i)}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2i}{k} \right\rfloor = 1 \text{ ، خلاصة: في جميع الحالات : } \left\lfloor \frac{2(k-i)}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2i}{k} \right\rfloor = 1$$

$$\text{بالتالي : } 2S = 1+1+1+...+1 = k-1 \text{ بالتالي : } S = \frac{k-1}{2}$$

تمرين 5 :

$$\text{لدينا : } x^2 - 19[x] + 88 = 0 \text{ ، نضع } [x] = k \in \mathbb{Z} \text{ منه : } k \leq x < k+1$$

$$\text{منه : } x^2 - 19k + 88 = 0 \text{ أي : } x^2 + 88 = 19k \text{ نستنتج إذن أن : } k > 0$$

$$\text{إذن : } k \leq x < k+1 \Rightarrow k^2 \leq x^2 < k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k^2 \leq 19k - 88 < k^2 + 2k + 1$$

$$\text{منه : } \begin{cases} k^2 - 19k + 88 \leq 0 \\ 0 < k^2 - 17k + 89 \end{cases} \text{ ، محددة الحدودية } k^2 - 17k + 89 \text{ سالبة وحيث أن معاملها موجب فهي دائما موجبة ،}$$

أي أن المتراجحة الثانية محققة

$$\text{جذرا الحدودية : } k^2 - 19k + 88 \text{ هما : 8 و 11}$$

$$\text{إذن : } 8 \leq k \leq 11 \Leftrightarrow k^2 - 19k + 88 \leq 0 \text{ ، منه : } k \in \{8, 9, 10, 11\}$$

$$\text{عكسيا : } k = 8 \Rightarrow x^2 = 19k - 88 = 64 \Rightarrow (x = 8 \text{ ou } x = -8) \Rightarrow x = 8 \text{ (لأن -8 لا يحقق المعادلة)}$$

$$k = 9 \Rightarrow x^2 = 19k - 88 = 83 \Rightarrow (x = \sqrt{83} \text{ ou } x = -\sqrt{83}) \Rightarrow x = \sqrt{83} \text{ (لأن } -\sqrt{83} \text{ لا يحقق المعادلة)}$$

$$k = 10 \Rightarrow x^2 = 19k - 88 = 107 \Rightarrow (x = \sqrt{107} \text{ ou } x = -\sqrt{107}) \Rightarrow x = \sqrt{107} \text{ (لأن } -\sqrt{107} \text{ لا يحقق المعادلة)}$$

$$k = 11 \Rightarrow x^2 = 19k - 88 = 121 \Rightarrow (x = 11 \text{ ou } x = -11) \Rightarrow x = 11 \text{ (لأن -11 لا يحقق المعادلة)}$$

$$\text{خلاصة : } S = \{8, \sqrt{83}, \sqrt{107}, 11\}$$

التحقق ضروري عكس التمرين الأول ، لأننا لم نستعمل التكافؤ أثناء البرهان بل الاستلزام فقط ، لذلك يجب التحقق من الاستلزام العاكس

تمرين 6 :

$$\text{لدينا : } \left\lfloor \frac{3x^2 - 2x + 1}{2} \right\rfloor = \frac{x+1}{2} \text{ ، نضع } \frac{x+1}{2} = k \text{ منه : } x = 2k - 1 \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{نستنتج أن : } \frac{x+1}{2} \leq \frac{3x^2 - 2x + 1}{2} < \frac{x+1}{2} + 1 \text{ (خاصية الجزء الصحيح : } \forall t \in \mathbb{R} \text{ } [t] \leq t < [t] + 1 \text{)}$$

$$\text{منه : } x+1 \leq 3x^2 - 2x + 1 < x+3 \text{ منه : } \begin{cases} 0 \leq 3x^2 - 3x \\ 3x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases} \text{ منه : } \begin{cases} 0 \leq x(x-1) \\ 3x^2 - 3x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{محددة الحدودية : } 3x^2 - 3x - 2 \text{ هي : } \Delta = 9 + 24 = 33$$

$$\text{إذن جذرا هذه الحدودية هما : } x_1 = \frac{3 + \sqrt{33}}{6} \approx 1,4 \text{ و } x_2 = \frac{3 - \sqrt{33}}{6} \approx -0,4$$

منه :

x	x_2	x_1
$3x^2 - 3x - 2$	+	-

منه : $x_2 < x < x_1$ ومنه : $x_2 < 2k - 1 < x_1$ وحيث أن : $x_1 \approx 1,4$ و $x_2 \approx -0,4$

فإن : $2k - 1 = 1$ أو $2k - 1 = 0$ أي : $k = 1$ أو $k = \frac{1}{2} \notin Z$

بالتالي : $x = 2k - 1 = 1$

عكسيا ، نتحقق بسهولة أن : العدد 1 حل للمعادلة المقترحة : $\left[\frac{3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1}{2} \right] = [1] = 1 = \frac{1+1}{2}$

خلاصة : $S = \{1\}$