السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات الفرض الأول الجمعة 28 نونبر 2014 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2015/2014

تمرين 1 — Exercise 1

لدينا : $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = ab+\dfrac{a^2+b^2}{2}+2xy = \dfrac{(a+b)^2}{2}+2xy$

منه : $2(x+y)^2 = (a+b)^2+4xy$

و بما أن : $4xy \le (x+y)^2$ فإن : $4xy+(a+b)^2 \le (x+y)^2+(a+b)^2$ منه : $2(x+y)^2 \le (x+y)^2+(a+b)^2$

منه : $(x+y)^2 \le (a+b)^2$

ولكون a و b و x و y أعداد موجبة فإننا نستنتج أن : $x+y \le a+b$ بالتالي : $\boxed{\dfrac{x+y}{2} \le \dfrac{a+b}{2}}$

تمرين 2 — Exercise 2

للتبسيط نرمز للنظمة $\begin{cases} x^2+x=y^3-y \\ y^2+y=x^3-x \end{cases}$ بـ (S)، أولا ندرس بعض الحالات الخاصة:

- إذا كان $x=0$ أو $x=-1$ فإن : $\begin{cases} 0=y^3-y \\ y^2+y=0 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} y(y-1)(y+1)=0 \\ y(y+1)=0 \end{cases}$ منه $y=0$ أو $y=-1$ (1 لن تحقق المعادلتين معا)
- إذا كان $\begin{cases} x\ne -0 \\ x\ne -1 \end{cases}$ فإن :

من جهة : $(S) \Rightarrow \begin{cases} x(x+1)=y(y+1)(y-1) \\ x(x+1)(x-1)=y(y+1) \end{cases}$، بما أن $\begin{cases} x\ne -0 \\ x\ne -1 \end{cases}$ فإن : $x(x+1)\ne 0$ منه : $y(y+1)(y-1)\ne 0$ منه $\begin{cases} y\ne 0 \\ y\ne -1 \\ y\ne 1 \end{cases}$

الآن نستنتج بقسمة طرفي النظمة على : $\begin{cases} x^2+x=y^3-y \\ y^2+y=x^3-x \end{cases} \Rightarrow x-1=\dfrac{1}{y-1} \Rightarrow xy-x-y+1=1$ منه $x+y=xy$ $(*)$

$$(S) \Rightarrow (x^2+x)+(x^3-x)=(y^3-y)+(y^2+y) \Rightarrow x^2+x^3=y^3+y^2$$

الآن و من جهة أخرى : $(S) \Rightarrow (x^2-y^2)+(x^3-y^3)=0 \Rightarrow (x-y)(x+y+x^2+xy+y^2)=0$

$$(S) \Rightarrow (x=y)\ ou\ (x^2+xy+y^2+x+y=0)$$

إذا كان $x=y$ فإن النظمة تصبح: $\begin{cases} x=y \\ x=0\ ou\ x=-1\ ou\ x=2 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x=y \\ x=0\ ou\ x^2-x-2=0 \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} x=y \\ x^3-x^2-2x=0 \end{cases}$

إذا كان $x^2+xy+y^2+x+y=0$ فإننا نستنتج من $(*)$ أن : $x^2+2xy+y^2=0$ منه : $(x+y)^2=0$ منه : $x+y=0$

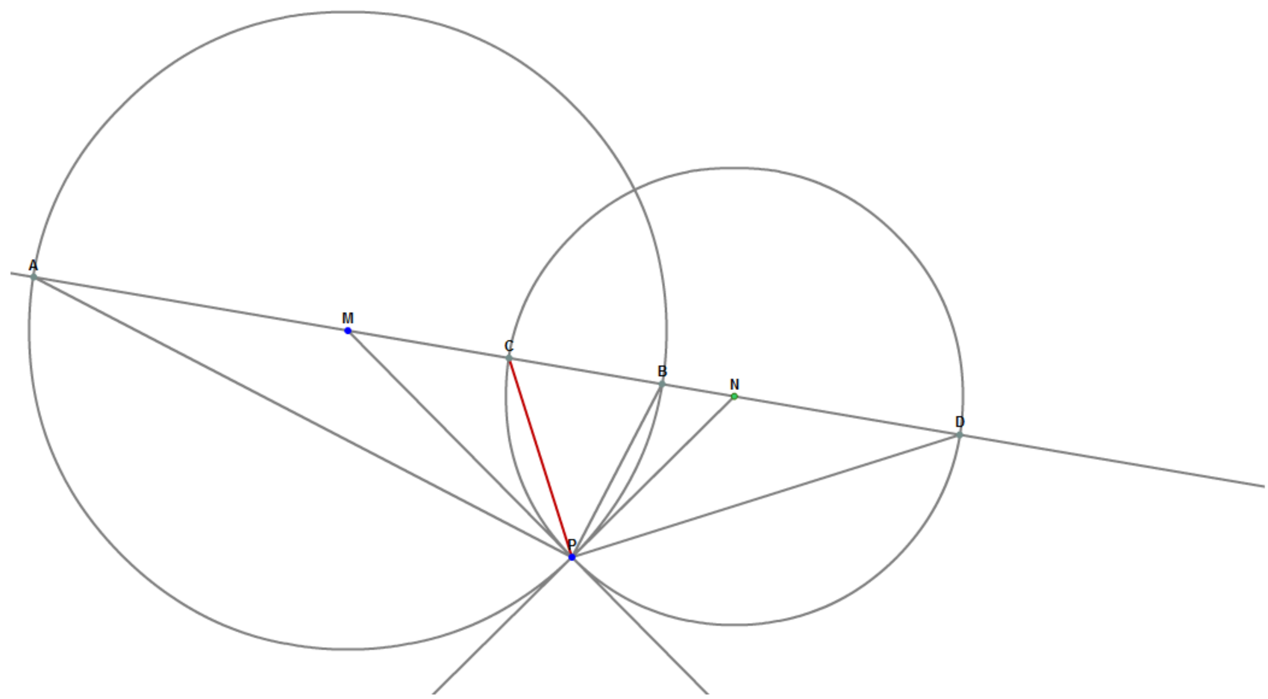
و من $(*)$ نستنتج من جديد أن $xy=0$ و هذا غير ممكن لأننا في حالة $\begin{cases} x\ne -0 \\ x\ne -1 \end{cases}$ وسبق وبرهنا أن $y\ne 0$

خلاصة بعد التحقق من الحلول المحصل عليها بالاستنتاجات السابقة يكون لدينا : $\boxed{S=\{(0;0);(0;-1);(-1;0);(-1;-1);(2;2)\}}$

تمرين يتطلب دقة كبيرة في التحليل الرياضي و الاستدلال السليم مع الحرص على دراسة كل الحالات الممكنة باستعمال مبادئ المنطق (العطف، فصل الحالات...)

يمكن حل النظمة بطريقة أخرى لكننا فضلنا إزاحة بعض الحالات التي إن لم يتم عزلها في دراسة مستقلة ينبثق منها حالات كثيرة.

Exercise 3 — تمرين 3



لدينا K_M دائرة قطرها $[AB]$ و $P \in K_M$ إذن APB مثلث قائم الزاوية في النقطة P .

إذن يجب أن نبرهن أن : $C\hat{P}B = \frac{\pi}{4} rad$

لدينا MNP مثلث قائم الزاوية في النقطة P منه (NP) مماس للدائرة K_M و (MP) مماس للدائرة K_N

في الدائرة K_M الزاويتان $B\hat{A}P$ و $B\hat{P}N$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس PB إذن : $B\hat{P}N = B\hat{A}P$

أيضا في الدائرة K_N الزاويتان $C\hat{D}P$ و $M\hat{P}C$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس PC إذن : $M\hat{P}C = C\hat{D}P$

و بما أن $MA = MP$ و $NP = ND$ فإن : $B\hat{P}N = M\hat{P}A$ و $C\hat{D}P = N\hat{P}D$

للتبسيط نضع : $B\hat{A}P = a$ و $C\hat{D}P = d$ و $C\hat{P}B = x$

لدينا في المثلث ADP : $B\hat{A}P + A\hat{P}D + A\hat{D}P = \pi$ ، أي $a + \left(a + \frac{\pi}{2} + d\right) + d = \pi$ أي : $a + d = \frac{\pi}{4}$

ولكون $M\hat{P}N = \frac{\pi}{2}$ فإن : $a + x + d = \frac{\pi}{2}$ بالتالي : $x = \frac{\pi}{2} - (a+d) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} rad$ و هذا ينهي البرهان.