

السنة الأولى علوم رياضية	أولمبياد الرياضيات 2014 الفرض الأول الجمعة 23 نونبر 2012 حلول مقترحة	السنة الدراسية: 2012/2013
--------------------------	---	---------------------------

Exercise 1

تمرين 1

$$A = a^6 + a^4 - a^3 - a + 1 = a^6 - a^3 + a^4 - a^2 + a^2 - a + 1$$

$$A = a^6 - a^3 + \frac{1}{4} + a^4 - a^2 + \frac{1}{4} + a^2 - a + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{نضع: } A = a^6 + a^4 - a^3 - a + 1, \text{ منه:}$$

$$A = \left(a^3 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} > 0$$

$$a + a^3 - a^4 - a^6 < 1 \quad \text{منه: } a^6 + a^4 - a^3 - a + 1 > 0 \text{ أي}$$

رغم توصلنا لقيم صحيحة للأعداد المطلوبة منذ البداية ($x_1 = 0$ ou $x_1 = -2$ ou $x_2 = 0$ ou $x_2 = -2$)، لكن ذلك لا يعني نهاية الجواب لأن القيم المحصل عليها ليست قيما تأخذها هذه الأعداد في نفس الوقت، أي أن الرابط ليس "الواو".

Exercise 2

تمرين 2

$$\text{نضع: } s = x + y \text{ و } p = xy \text{، نعلم أن } s^2 \geq 4p \text{ إذن: } s^2 \geq 4(3-s) \text{ منه: } s^2 + 4s \geq 12 \text{ منه: } s^2 + 4s + 4 \geq 16$$

$$\text{منه: } (s+2)^2 \geq 16 \text{ منه: } s+2 \geq 4 \text{ (لأن } s+2 > 0 \text{)} \text{ بالتالي } s \geq 2$$

$$s = 2 \Rightarrow p = 1 \text{ و } y \text{ هما حلّي المعادلة } t^2 - st + p = 0 \text{ أي } t^2 - 2t + 1 = 0 \text{ أي } (t-1)^2 = 0 \text{ منه: } x = y = 1$$

$$x = y = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y + xy = 3 \end{cases} \text{ عكسيا}$$

تمرين سهل طبقنا فيه الخاصية "إذا كان مجموع عدة أعداد حقيقية موجبة منعدما فإن كل الأعداد منعدمة".

Exercise 3

تمرين 3

طريقة 1:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2yz + 1 \\ x + y + z = 4018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2yz + z^2 = 1 \\ x + y + z = 4018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y-z)^2 = 1 \\ x + y + z = 4018 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \left((|x|=1) \text{ et } (y=z) \right) \text{ ou } \left((x=0) \text{ et } (|y-z|=1) \right) \right\}$$

$$x + y + z = 4018$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=1 \\ y=z \\ 1+2y=4018 \end{cases} \right) \text{ ou } \left(\begin{cases} x=-1 \\ y=z \\ -1+2y=4018 \end{cases} \right) \text{ ou } \left(\begin{cases} x=0 \\ y-z=1 \\ y+z=4018 \end{cases} \right) \text{ ou } \left(\begin{cases} x=0 \\ y-z=-1 \\ y+z=4018 \end{cases} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x=1 \\ y=z=2008,5 \notin \mathbb{Z} \end{cases} \right) \text{ ou } \left(\begin{cases} x=-1 \\ y=z=2009,5 \notin \mathbb{Z} \end{cases} \right) \text{ ou } \left(\begin{cases} x=0 \\ y=2009,5 \notin \mathbb{Z} \\ z=2008,5 \notin \mathbb{Z} \end{cases} \right) \text{ ou } \left(\begin{cases} x=0 \\ y=2008,5 \notin \mathbb{Z} \\ z=2009,5 \notin \mathbb{Z} \end{cases} \right)$$

منه: $S = f$

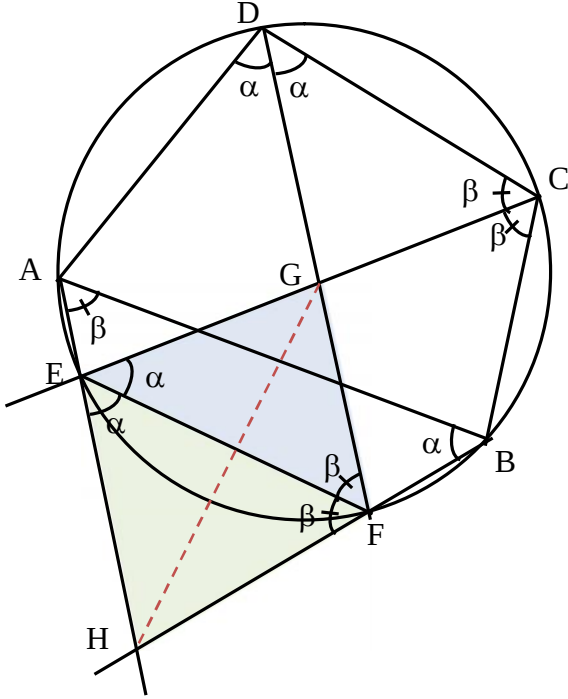
طريقة 2:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2yz + 1 \\ x + y + z = 4018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \text{ impair} \\ (x+y+z)^2 = 4018^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \text{ impair} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4018^2 - 2(xy + yz + xz) \text{ paire} \end{cases}$$

بالتالي: $S = f$

Exercise 4

تمرين 4



بداية نضع: $b = \widehat{DCE} = \widehat{ECB}$ و $a = \widehat{ADF} = \widehat{FDC}$ بما أن الرباعي $AFDB$ دائري، إذن بملاحظة زوايا محيطية تحصر نفس القوس.

فإننا نستنتج أن: $\widehat{EAB} = \widehat{ECB} = b$ و $\widehat{ABF} = \widehat{ADF} = a$

و: $\widehat{GFE} = \widehat{ECD} = b$ و $\widehat{GEF} = \widehat{FDC} = a$

وأیضا: $\widehat{EFB} + \widehat{EAB} = p$ و $\widehat{AEF} + \widehat{ABF} = p$

منه: $\widehat{HEF} = p - \widehat{AEF} = \widehat{ABF} = a$

و $\widehat{HFE} = p - \widehat{EFB} = \widehat{EAB} = b$

إذن نستنتج مما سبق أن: $\widehat{GFE} = \widehat{HFE}$ و $\widehat{GEF} = \widehat{HEF}$

إذن ولكون الضلع $[EF]$ مشترك بين المثلثين GEF و HEF ولهما زاويتان متقايستان فهما متقايسان.

إذن: $FG = FH$ و $EG = EH$

إذن النقطتان E و F تنتميان لوسط $[GH]$ (لأنهما تبعدان بنفس المسافة عن طرفي هذه القطعة)، إذن وسط $[GH]$ هو (EF)

بالتالي: $(EF) \perp (GH)$

في كثير من الأحيان يعتمد الحل على قواعد بسيطة من سنوات الإعدادي كالواسط و التماثل المحوري وغيرهما.

الحلول المقترحة هي حلول شخصية وليست حلولاً رسمية