

Première Partie :
Travail
mécanique et
L'énergie
 Unité 1
 7 H

Mouvement de rotation d'un solide indéformable autour d'un axe fixe



1^{er} Bac Sciences Physique

حركة دوران جسم صلب غير قابل للتشوه حول محور ثابت

I – Repérage d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe :

1 – Mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe :

1-1 – Activité :

Parmi les **corps solides** en **mouvement** représentés ci-contre :

a- Déterminer les **corps** qui ayant un **mouvement de translation** et déterminer **sa nature**.

Les **nacelles** dans les **figures 1 et 4** ayant des **mouvements de translation circulaire** et la **nacelle** dans la **figure 2** à un **mouvement de translation curviligne**.

b- Déterminer les **corps** ayant des **mouvements de rotation** autour d'un **axe fixe**.

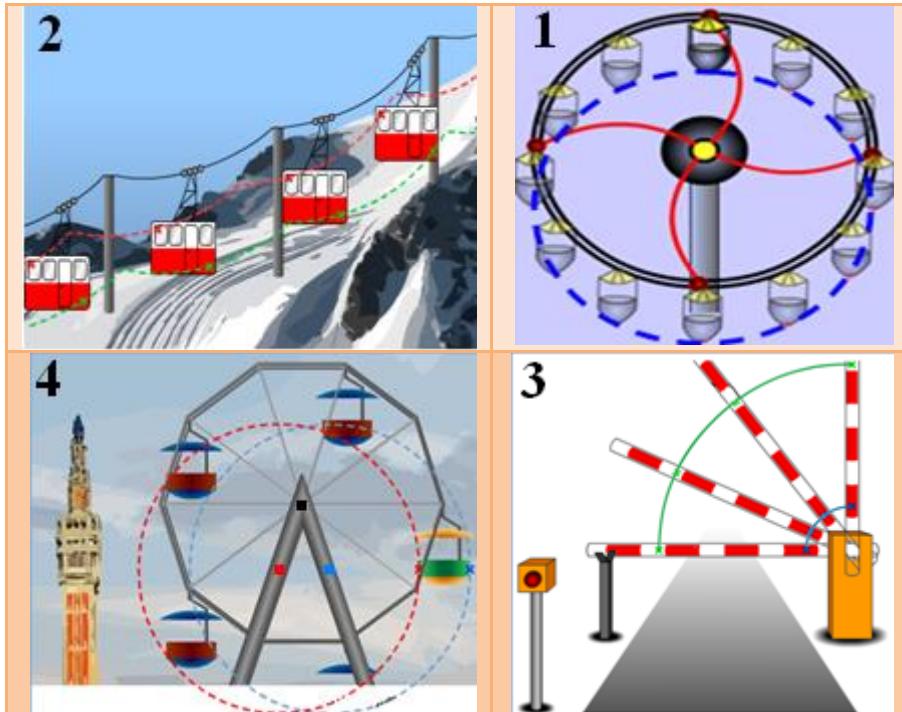
Le **bras** dans la **figure 3** à un **mouvement de rotation autour d'un axe fixe**.

c- Quelles sont les **formes** des **trajectoires** des **points** formant le **bras** de la **grande roue** dans la **figure 4** ?

Tous les **points** formant le **bras** de la **grande roue** ont des **trajectoires circulaires centrées** autour d'un **axe fixe**.

d- Pour la **figure 4**, quelle **différence** y'a-t-il entre le **mouvement** des **barres** et celui de la **nacelle** ?

Le **bras** réalise un **mouvement de rotation autour d'un axe fixe**, mais la **nacelle** est en **mouvement de translation circulaire**, où chaque **segment** de la **nacelle** conserve la **même direction** au cours du mouvement.

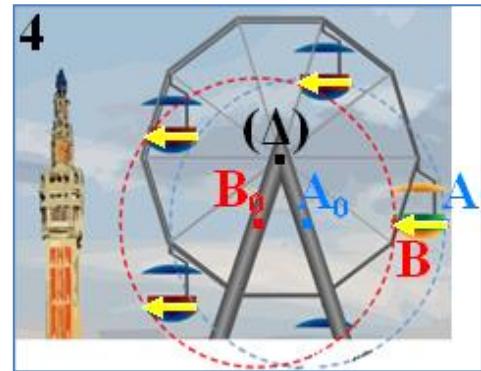


1-2 – Conclusion :

Un solide indéformable possède un mouvement de rotation autour d'un axe fixe si le mouvement de chacun de ses points est circulaire centré sur cet axe et la trajectoire de ces points mobiles appartient au plan orthogonal avec l'axe de rotation.

1-3- Mouvement de rotation et mouvement de translation circulaire :

La grande roue est constituée d'une roue à la verticale ainsi que de nacelles attachées à la jante où montent les passagers. Pour la roue, elle réalise un mouvement de rotation autour de l'axe fixe Δ (car tous les points de la roue sont en mouvement circulaire centré sur cet axe). mais pour les nacelles, elles sont en mouvement translation circulaire (car chaque segment combine deux points des nacelles maintient une direction constante $\overrightarrow{AB} = \text{Cte}$, et chaque point des nacelles réalise une trajectoire circulaire de centre différent A_0 et B_0).

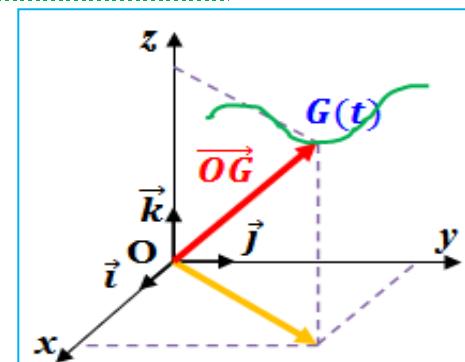


2 – Repérage d'un point d'un solide en rotation autour d'un axe fixe :

On peut repérer la position d'un point mobile G d'un solide dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à un référentiel à chaque instant par un vecteur de position $\overrightarrow{OG} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ avec $\|\overrightarrow{OG}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ c'est le module du vecteur de position.

Avec x , y et z les coordonnées de la position G dans le repère orthonormé \mathcal{R} .

Pour simplifier, on repère la position du point mobile G à chaque instant en utilisant l'**abscisse angulaire** $\theta(t)$ ou l'**abscisse curviligne** $s(t)$.

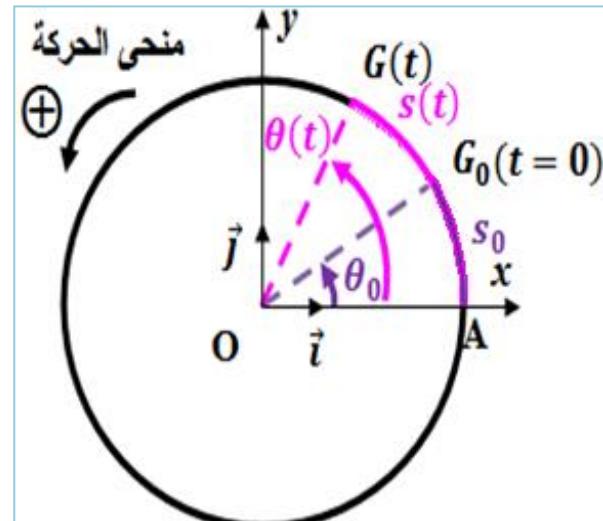


1-1 - Abscisse angulaire :

On prend la direction de l'axe (\overrightarrow{Ox}) comme direction de référence.

On appelle **abscisse angulaire** d'un point mobile G à un instant t donné, la valeur algébrique de l'angle $\theta(t) = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OG})$.

Son unité dans (S.I) est radian rad



1-2 - Abscisse curviligne :

On prend le **point A** (point d'intersection entre Ox et la trajectoire) comme **point de référence**.

On appelle **abscisse curviligne** d'un point mobile G à un instant t donné, la valeur algébrique de la distance $s(t) = \widehat{AG}$.

Son unité dans (S.I) est mètre m

1-3 - La relation entre l'abscisse curviligne et l'abscisse angulaire :

La **relation** entre les deux abscisses $s(t)$ et $\theta(t)$ est : $s(t) = r \cdot \theta(t)$ tel que r est le **rayon** de la **trajectoire circulaire** du point G

II – La vitesse angulaire :

1 – Activité :

On considère le système de { autoporteur + détonateur latéral } comme un **corps solide** qui peut tourner autour d'un axe fixe (Δ) appartient au **morceau métallique** et passe de son **centre de symétrie**.

On travaille pour que le **détonateur central A** et le **détonateur latéral B** et l'axe (Δ) soit **colinéaire**.

On lance le **corps solide** et on enregistre le **mouvement** des deux **points A** et **B** pendant des **périodes de temps égales et successifs** $\tau = 40 \text{ ms}$ comme le montre l'**enregistrement ci-contre**.

a- Déterminer la **nature de mouvement** des **points A et B** .

On a $OA_0 = OA_1 = OA_2 = \dots = 6 \text{ cm} = Cte$
donc la **distance** entre les **points A_i** et le **point O** **reste constante** (appartient à un **arc de cercle**) donc le **point A** est en **mouvement circulaire de centre O** .

On a $OB_0 = OB_1 = OB_2 = \dots = 12 \text{ cm} = Cte$
donc la **distance** entre les **points B_i** et le **point O** **reste constante** (appartient à un **arc de cercle**) donc le **point B** est en **mouvement circulaire de centre O** .

b- Comparer les **distances parcourues** par chaque point pendant la **même durée τ** , Que concluez-vous ?

On a $A_0A_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots = 1,8 \text{ cm} = Cte$ donc le **point A** parcourt la **même distance** dans la **même durée τ** d'où $V_A = Cte$

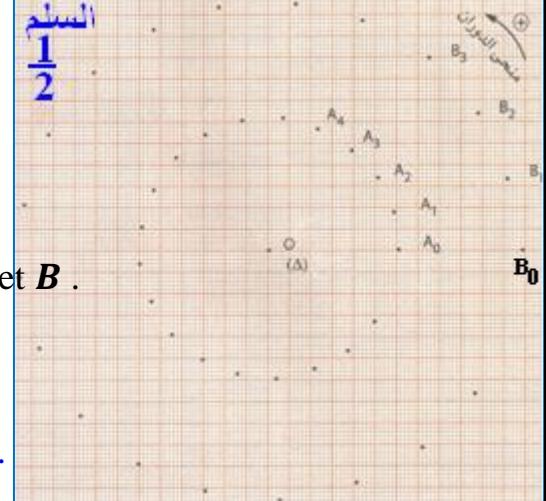
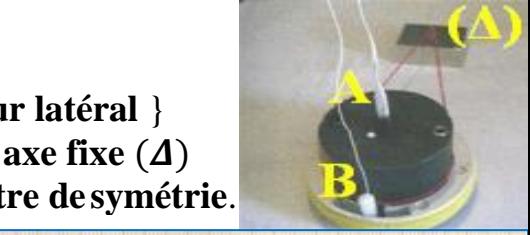
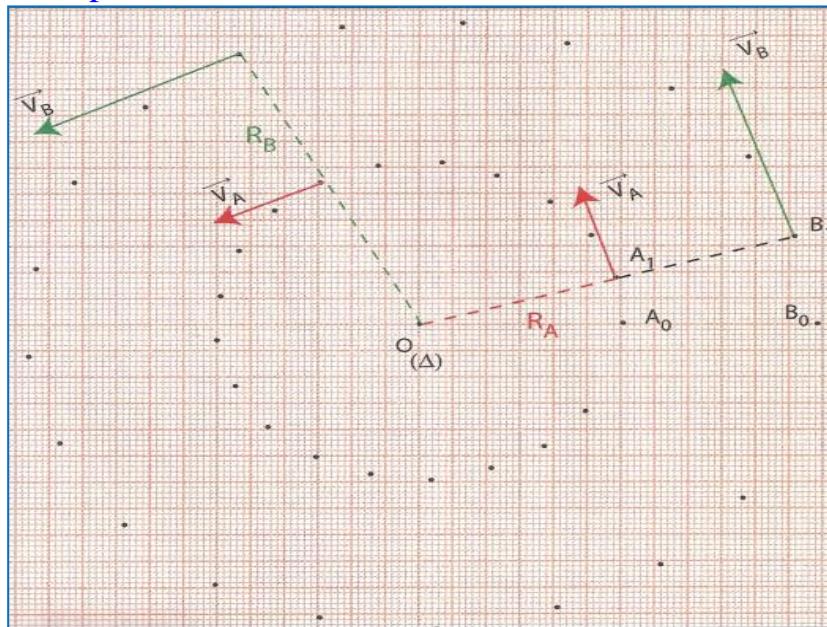
On a $B_0B_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots = 3,4 \text{ cm} = Cte$ donc le **point B** parcourt la **même distance** dans la **même durée τ** d'où $V_B = Cte$

c- Représenter, en utilisant **même échelle**, les **deux vecteurs \vec{V}_A et \vec{V}_B** . Que concluez-vous ?

$$\text{On a } V_A = \frac{\widehat{A_{i-1}A_{i+1}}}{2\tau} \approx \frac{A_{i-1}A_{i+1}}{2\tau} = \frac{2 \times 1,8 \cdot 10^{-2}}{2 \times 40 \cdot 10^{-3}} = 0,45 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{On a } V_B = \frac{\widehat{B_{i-1}B_{i+1}}}{2\tau} \approx \frac{B_{i-1}B_{i+1}}{2\tau} = \frac{2 \times 3,4 \cdot 10^{-2}}{2 \times 40 \cdot 10^{-3}} = 0,85 \text{ m.s}^{-1}$$

On représente les **deux vecteurs** à l'échelle : $0,45 \text{ m.s}^{-1} \leftrightarrow 2 \text{ cm}$ on trouve :



Les caractéristiques de vecteur Vitesse \vec{V}

Point d'application : centre d'inertie G du mobile à l'instant t_i .

Ligne d'action : la tangente de la trajectoire au point G .

Le sens : sens de mouvement.

La norme : pratiquement déterminer par :

$$v_{G_i} = \frac{G_{i-1}G_{i+1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

On a $V_A < V_B$, on conclure que plus on s'éloigne de l'axe de rotation, plus la vitesse linéaire augmente.

d- Par un rapporteur (منقلة), mesurer les angles $\Delta\theta_A$ et $\Delta\theta_B$ balayés par les deux points **A** et **B** pendant la durée : $\Delta t = t_{i+1} - t_{i-1} = 2 \cdot \tau$. Comparer $\Delta\theta_A$ et $\Delta\theta_B$. Que concluez-vous ?

On a $\Delta\theta_B = 34^\circ = 0,6 \text{ rad}$ et $\Delta\theta_A = 34^\circ = 0,6 \text{ rad}$ donc $\Delta\theta_A = \Delta\theta_B$ on peut déduire que pendant la durée $\Delta t = 80 \text{ ms}$, les deux points **A** et **B** tournent par le même angle $\Delta\theta = 34^\circ = 0,6 \text{ rad}$.

e- On définit la vitesse angulaire ω_i par : $\omega_i = \frac{\Delta\theta}{t_{i+1} - t_{i-1}}$. Calculer les vitesses angulaires ω_A et ω_B des points **A** et **B**. Que concluez-vous ?

$$\text{On a } \omega_A = \frac{0,6}{2 \times 40 \cdot 10^{-3}} = 7,5 \text{ rad.s}^{-1} \text{ et } \omega_B = \frac{0,6}{2 \times 40 \cdot 10^{-3}} = 7,5 \text{ rad.s}^{-1}$$

On constate que $\omega_A = \omega_B$, donc on déduit que tous les points du solide en rotation autour un axe fixe avec la même vitesse angulaire ω au cours du temps.

f- Déterminer la nature du mouvement de corps solide.

Le corps solide est en rotation avec une vitesse angulaire constante au cours du temps, donc il est en mouvement de rotation uniforme.

g- Déterminer R_A et R_B puis calculer les grandeurs $R_A \cdot \omega_{A_i}$ et $R_B \cdot \omega_{B_i}$ et comparer ces produits avec la vitesse linéaire V_{A_i} et V_{B_i} . Que concluez-vous ?

$$\text{On a } R_A = OA = 6 \cdot 10^{-2} \text{ m et } R_B = OB = 12 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{Donc } R_A \cdot \omega_{A_i} = R_A \cdot \omega_A = 6 \cdot 10^{-2} \times 7,5 = 0,45 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } V_A = 0,45 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{On constate que } V_A = R_A \cdot \omega_A .$$

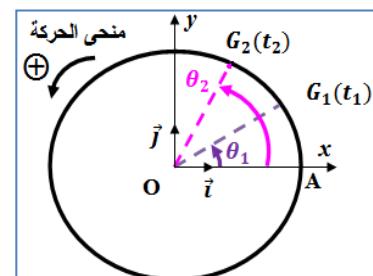
$$\text{Et on a } R_B \cdot \omega_{B_i} = R_B \cdot \omega_B = 12 \cdot 10^{-2} \times 7,5 = 0,9 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } V_B = 0,85 \text{ m.s}^{-1}$$

On constate que $V_B = R_B \cdot \omega_B$. Alors pendant la rotation du corps solide, la relation $V_i = R \cdot \omega_i$ est vérifiée à chaque instant.

2 – La vitesse angulaire moyenne :

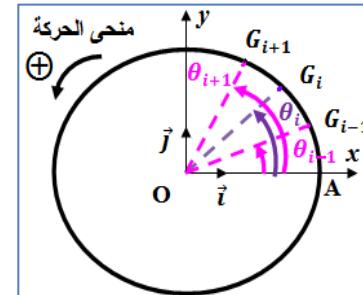
La vitesse angulaire moyenne ω_{moy} d'un point **G entre deux instants t_1 et t_2 est :** $\omega_{moy} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1}$

Son unité en (S.I) est : rad.s^{-1}



3 – La vitesse angulaire instantanée :

La vitesse angulaire instantanée ω_i est le rapport de l'angle balayé par le vecteur position sur l'unité temps : $\omega_i = \frac{\delta\theta}{\delta t} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$ Son unité en (S.I) est : rad.s^{-1}



4 – La relation entre la vitesse angulaire et la vitesse linéaire :

$$\text{On a : } V_i = \frac{G_{i-1}G_{i+1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{\overline{AG}_{i+1} - \overline{AG}_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{s_{i+1} - s_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = \frac{R \cdot \theta_{i+1} - R \cdot \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} = R \cdot \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

$$\text{Donc : } V_i = R \cdot \omega_i$$

Remarque : Pendant la rotation d'un solide autour d'un axe fixe, à chaque instant, tous ses points ont la même vitesse angulaire ω mais la vitesse linéaire augmente lorsqu'on s'éloigne de l'axe de rotation.

III – Mouvement de rotation uniforme :

1 – Définition :

Le mouvement de rotation d'un solide autour d'un axe fixe est dit uniforme si sa vitesse angulaire ω reste constante au cours du temps. $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = Cte$

2 – Les caractéristiques de rotation uniforme :

La Période est la *durée nécessaire pour que chaque point du solide (S) en rotation uniforme réalise un tour complet.* $T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow (s)$

La Fréquence est le *nombre du tour réalisé par chaque point du solide en rotation uniforme pendant une seconde.* $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \rightarrow (Hz)$

<u>Mouvement</u>	<u>Fréquence(Hz)</u>
Palette d'un ventilateur	5
Cylindre d'une machine à laver	13.3
Mouvement d'un CD	6.67
Mouvement de la terre autour de son axe de rotation	$1,16 \cdot 10^{-5}$

3 – Équation horaire du mouvement :

Les équations horaires de mouvement d'un point du solide en rotation uniforme autour d'un axe fixe sont :

$$\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0 \quad s(t) = V \cdot t + s_0$$

*Tel que : θ_0 : c'est l'**abscisse angulaire** à l'instant $t = 0$.
 s_0 : c'est l'**abscisse curviligne** à l'instant $t = 0$.*

On a $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$. On considère que $\Delta t = t - t_0$ avec $t_0 = 0$ et $\Delta\theta = \theta(t) - \theta_0$
Alors $\omega = \frac{\theta(t) - \theta_0}{t}$ d'où l'équation horaire de mouvement est $\theta(t) = \omega \cdot t + \theta_0$