Chapitre 13

Droites et plans dans l'éspace

I) Repérage dans l'Espace

1) Définition – Coordonnées

Définition : On appelle **repère de l'Espace** tout quadruplet $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ où O est un point de l'Espace et où $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont trois vecteurs non coplanaires.
Si les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux, le repère est dit **orthogonal**.
Si, de plus, les vecteurs sont unitaires ($\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$), on dit que le repère est **orthonormal**.

Exemples :

1. Dans le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1(voir figure 3), le quadruplet $\left(D\,;\,\overrightarrow{DA}\,;\,\overrightarrow{DC}\,;\,\overrightarrow{DH}\right)$ forme un repère orthonormé.

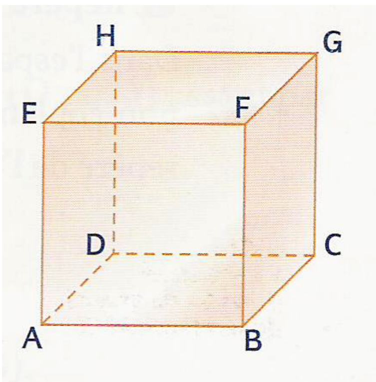


FIG. 3 – Un cube

2. Dans un tétraèdre $ABCD$ (voir figure4), le quadruplet $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AC}\,;\,\overrightarrow{AD}\right)$ est un repère (quelconque).

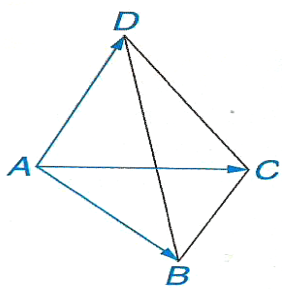


FIG. 4 – Un tétraèdre

Théorème : (admis)

Soit $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ un repère de l'Espace.

1. Soit M un point de l'Espace.
   Il existe un unique triplet $(x\,;\,y\,;\,z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath} + z\overrightarrow{k}$ (voir figure 5).
   Ce triplet est appelé **coordonnées** de M. On note $M\ (x\,;\,y\,;\,z)$.
2. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'Espace.
   Il existe un unique triplet $(a\,;\,b\,;\,c)$ tel que $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{\imath} + b\overrightarrow{\jmath} + c\overrightarrow{k}$.
   Ce triplet est appelé **coordonnées** de $\overrightarrow{u}$. On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

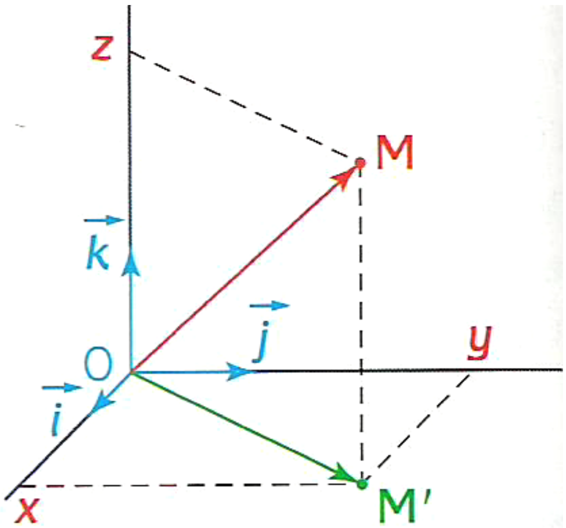


FIG. 5 – Coordonnées dans un repère de l'Espace

Remarque : x est appelé abscisse, y est appelé ordonnée et z est appelé cote.

2) Calcul sur les coordonnées

Les résultats sont identiques à ceux du plan.
On a, par exemple :

- Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :
  - les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$
  - les coordonnées du milieu I du segment $[AB]$ sont : $I\ \left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\,\frac{y_A+y_B}{2}\,;\,\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et si $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ alors :
  - les coordonnées de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ sont : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}$
  - Si k est un réel, les coordonnées du vecteur $k\overrightarrow{u}$ sont : $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} k \times a \\ k \times b \\ k \times c \end{pmatrix}$

Exercice : Soit $A\ (3\,;\,1\,;5)$ et $B\ (0\,;\,5\,;\,4)$ dans le repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$.

1. Placer ces points dans le repère.
2. Calculer les coordonnées du milieu I de $[AB]$ et du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point M de la droite (AB) dont la cote est 2 ?

3) Colinéarité, coplanarité

Méthode :

- Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$.
- Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires) sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Il s'agit donc, grâce aux coordonnées des vecteurs, de trouver ces réels pour montrer la colinéarité ou la coplanarité.

Remarque : Dans l'Espace, il n'existe pas de propriété simple équivalente à celle des « produits en croix » de coordonnées pour des vecteurs colinéaires du plan.

Definition : on appelle **déterminant des vecteurs** $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ le déterminant :

$$\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}$$

Proprieté

- $\vec{w}$ est une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ssi $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w}) = 0$
- A, B, C, D coplanaires ssi $\overrightarrow{AD}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc ssi $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right) = 0$.

Proprieté

Soit $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ *un repère de l'espace*

Deus vecteurs $\vec{u}(x_u,y_u,z_u)$ *et* $\vec{v}(x_v,y_v,z_v)$ *sont colinéaire si et seulement si*

$$d_y = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = x_u z_v - z_u x_v = 0 \quad et \quad d_y = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} = x_u z_v - z_u x_v = 0 \quad et \quad d_z = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u y_v - y_u x_v = 0$$

Exercice résolu : Dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ de l'Espace, on considère les points :

$A\,(4\,;0\,;0)$ $B\,(0\,;3\,;0)$ $C\,(0\,;0\,;6)$ et $M\,\left(1\,;\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$

On note I le milieu de $[AC]$ et L le point tel que $3\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BC}$.

1. Déterminer les coordonnées de I et de L.
2. Montrer que les points A, M et L sont alignés.
3. Montrer que les points A, B, C et M sont coplanaires.

Solution :

1. I est le milieu de $[AC]$ donc : $I\,\left(\frac{4+0}{2}\,;\frac{0+0}{2}\,;\frac{0+6}{2}\right)$ soit $\mathbf{I}\,(\mathbf{2}\,;\mathbf{0}\,;\mathbf{3})$.
   On note $L\,(x_L\,;y_L\,;z_L)$.
   On a : $\overrightarrow{BL}\begin{pmatrix}x_L-0\\y_L-3\\z_L-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-3\\6\end{pmatrix}$.
   En coordonnées, l'égalité $3\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{BC}$ devient donc : $\begin{cases}3x_L & =0\\3\,(y_L-3) & =-3\\3z_L & =6\end{cases}$.
   Donc, après calcul : $\begin{cases}x_L & =0\\y_L & =2\\z_L & =2\end{cases}$ donc $\mathbf{L}\,(\mathbf{0}\,;\mathbf{2}\,;\mathbf{2})$.
2. $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}-3\\\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AL}\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}$.
   Les points A, M et L sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AL}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AL}$.
   En coordonnées, on obtient : $\begin{cases}-4k & =-3\\2k & =\frac{3}{2}\\2k & =\frac{3}{2}\end{cases}$ soit $\begin{cases}k & =\frac{3}{4}\\k & =\frac{3}{4}\\k & =\frac{3}{4}\end{cases}$ donc : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AL}$.
   Par suite, **les points A, M et L sont alignés.**
3. Il faut d'abord montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}$.
   Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
   En coordonnées, on obtient : $\begin{cases}-4k & =-4\\0 & =3\\6k & =0\end{cases}$, ce qui est impossible.
   Par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.
   Dans ce cas, les points A, B, C et M sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels a et b tels que : $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}$.
   En coordonnées, on obtient : $\begin{cases}-4a-4b & =-3\\3a & =\frac{3}{2}\\6b & =\frac{3}{2}\end{cases}$.
   La deuxième équation donne $a=\frac{1}{2}$ et la dernière équation donne $b=\frac{1}{4}$. Reste à vérifier la première équation : $-4\times\frac{1}{2}-4\times\frac{1}{4}=-2-1=-3$.
   Cette équation est vérifiée donc **les points A, B, C et M sont coplanaires.**

II) Distance, orthogonalité

1) Distance entre deux points dans un repère orthonormé

Propriété :

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{\imath}\,;\,\overrightarrow{\jmath}\,;\,\overrightarrow{k}\right)$ orthonormé.

1. Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors sa norme est :

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

2. Si $A\ (x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et si $B\ (x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$ alors :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Démonstration (du 1.)

Soit M le point de l'Espace tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}$. On pourra se reporter à la figure 5.

Le repère étant orthonormal, le triangle OMM' est rectangle en M'. D'après le théorème de Pythagore, on a : $OM^2 = OM'^2 + MM'^2$.

Or, $\overrightarrow{MM'} = c\,\overrightarrow{k}$ donc $MM'^2 = c^2$.

De plus, le triangle OPM' est rectangle en P , donc : $OM'^2 = OP^2 + PM'^2$.

Or, $\overrightarrow{OP} = a\,\overrightarrow{\imath}$ donc $OP^2 = a^2$ et $\overrightarrow{PM'} = b\,\overrightarrow{\jmath}$ donc $PM'^2 = b^2$.

On obtient donc : $OM^2 = a^2+b^2+c^2$.

Donc, $\|\overrightarrow{u}\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = OM = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Remarque : La deuxième partie de la propriété se prouve en remarquant simplement que $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ et que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$.

2) Relation d'orthogonalité de deux vecteurs

Propriété (admise) : On se place dans un repère orthonormé.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ sont orthogonaux si et seulement si :

$$aa'+bb'+cc' = 0$$

III) Représentations paramétriques d'une droite de l'Espace

1) Définition

On se place dans un repère $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k}\right)$ de l'Espace.

Soit $\mathcal{D}$ une droite passant par un point $A\,(x_A\,;\,y_A\,;z_A)$ et de vecteur *directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ est un point de $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.
En passant aux coordonnées, on obtient :

$$\begin{cases} x - x_A = at \\ y - y_A = bt \\ z - z_A = ct \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

Définition : On appelle représentation paramétrique ou syst d'équations paramétriques de la droite $\mathcal{D}$ par un point $A\,(x_A\,;\,y_A\,;z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ le système :

$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Le réel t est appelé paramètre.

Remarques :

1. Un point M est sur $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que les coordonnées de M vérifie le système d'équations paramétriques de $\mathcal{D}$.
2. Réciproquement, si la droite Δ admet comme équation paramétrique $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \\ z = z_0 + \gamma t \end{cases}$, cette droite passe par le point $M_0\,(x_0\,;\,y_0\,;\,z_0)$ et admet comme vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.
3. Pour obtenir une représentation paramétrique du segment $[AB]$, il suffit de prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, comme point de la droite le point A et de prendre $t \in [0\,;\,1]$.
4. Pour obtenir une représentation paramétrique de la demi-droite $[AB)$, il suffit de prendre comme vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$, comme point de la droite le point A et de prendre $t \in [0\,;\,+\infty[$.

IV) Equation cartésienne d'un plan

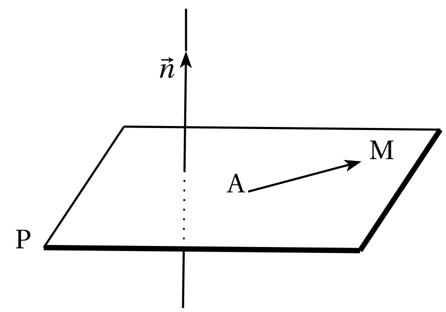
Définition .

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur non nul dont la direction est orthogonale à P.

Soit A un point d'un plan P et $\vec{n}$ un vecteur normal à P.
On a, pour tout point M du plan P,

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

Réciproquement, si M est un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$, alors $M\in P$ On a donc le résultat suivant :



Propriété . (Caractérisation d'un plan P)

Le plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$$

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormal $(O;veci,\vec{j},\vec{k})$ on donne $A(1;2;3)$ et $\vec{n}(1;-3;1)$. Trouver une équation du plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{n}$.

Solutions :

Soit $M(x;y;z)\in P$ on a alors :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\Longleftrightarrow(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0\Longleftrightarrow x-3y+z+2=0$$

P a donc pour équation

$$x-3y+z+2=0$$

Théorème

Dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, tout plan P admet une équation (dite cartésienne) de la forme :

$$ax+by+cz+d=0$$

avec a, b, c réels non tous nuls et d réel.
De plus le vecteur $\vec{n}(a;b;c)$ est normal à P

Preuve

Notons $A(x_0; y_0; z_0)$ un point de P et $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à P, alors on a :

$$M(x; y; z) \in P \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

i.e

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Longleftrightarrow ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

En posant $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ on obtient le résultat désiré

Remarques :

- Notons que l'équation d'un plan n'est pas unique. En effet si $P : x + y + z = 1$ alors P a aussi pour équation $2x + 2y + 2z = 2$.
- Quelques cas particuliers :
  Le plan (Oxy) a pour équation $z = 0$, en effet $O(0;0;0) \in (Oxy)$ et $\vec{k}(0;0;1)$ est normal à ce plan, ainsi :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{k} = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

  De la même manière les plans (Oxz) et (Oyz) ont respectivement pour équation $y = 0$ et $x = 0$.
  Enfin le plan P passant par les points $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$ et $C(0;0;c)$ a pour équation :

exercice 2

On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$$P : x - 4y + 7 = 0$$

$$Q : x + 2y - z + 1 = 0$$

1. Montrer que ces plans sont sécants. On note d leur droite d'intersection.
2. Déterminer un vecteur directeur de d.

Solutions :

1. Les plans P et Q sont soit sécants soit parallèles.
   Le vecteur $\vec{n}(1;-4;0)$ est normal à P et le vecteur $\vec{n}'(1;2;-1)$ est normal à Q.
   On a $\mathrm{P}//\mathrm{Q} \Longleftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont deux vecteurs colinéaires. Existe-t-il un réel k tel que :
   $$\vec{n} = k\vec{n}'$$
   Si c'était le cas on aurait $k = 1$ et $2k = -4$, ce qui est absurde, ainsi les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, par conséquent les plans P et Q ne sont pas parallèles, P et Q sont donc sécants selon une droite d.
2. Si $\mathrm{M}(x;y;z) \in d$, alors $\mathrm{M} \in \mathrm{P} \cap \mathrm{Q}$, par conséquent les coordonnées de M vérifient le système suivant :
   $$\begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$
   Posons $y = t$, il vient :
   $$\begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = t \\ z = 4t - 7 + 2t + 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 4t - 7 \\ y = t \\ z = 6t - 6 \end{cases}$$
   On a pu exprimer les coordonnées d'un tel point M en fonction d'un paramètre t, on dit qu'il s'agit d'une équation paramétrique de la droite d.
   Pour $t = 0$, alors $\mathrm{A}(-7;0;-6)$ est un point de la droite d. Considérons le vecteur $\vec{u}(4;1;6)$
   Le système ci-dessus se réécrit :
   $$\begin{cases} x + 7 = 4t \\ y - 0 = t \\ z - (-6) = 6t \end{cases} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\vec{u}$$
   Ainsi $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, par conséquent $\vec{u}$ est un vecteur directeur de d.

Théorème

Deux plans P et Q sont orthogonaux si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
Deux plans P et Q sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Corollaire

Soit deux plans P et Q d'équations

$$\mathrm{P} : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

1. $\mathrm{P}//\mathrm{Q} \Longleftrightarrow (a,b,c)$ et (a',b',c') sont proportionnels.
2. $\mathrm{P} \perp \mathrm{Q} \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$.

Preuve

1. $P//Q \Longleftrightarrow \vec{n}(a;b;c) = k\vec{n'}(a';b';c')$
2. $P \perp Q \Longleftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Longleftrightarrow \vec{n}\cdot\vec{n'} = 0 \Longleftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$

Exercice 3 :

Quelle est l'équation générale d'un plan parallèle au plan (xOy) ?

Solutions :

Le plan (xOy) a pour équation $z = 0$ et le plan P cherché a une équation du type :

$$ax + by + cz + d$$

D'après le corollaire précédent on sait que (a, b, c) et $(0, 0, 1)$ sont proportionnels, donc $a = 0$ et $b = 0$, par conséquent le plan P a une équation du type (avec $c \neq 0$) :

$$cz + d = 0 \Longleftrightarrow z = -\frac{d}{c}$$

Exercice 4 :

Quelle est l'équation générale d'un plan perpendiculaire au plan (xOy) ?

Solutions :

Soit P un tel plan avec $\vec{n}(a;b;c)$ un vecteur normal, il a donc une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

Mais (xOy) a pour équation $z = 0$ et donc pour vecteur normal $\vec{n'}(0;0;1)$, donc d'après le corollaire on a :

$$\vec{n}\cdot\vec{n'} = 0 \Longleftrightarrow 0a + 0b + c = 0 \Longleftrightarrow c = 0$$

D'où le plan P a une équation de la forme :

$$ax + by + d = 0$$

V) les poisitions relatives de droites et de plans

1) *Intersection d'une droite et d'un plan*

Considérons un plan P d'équation

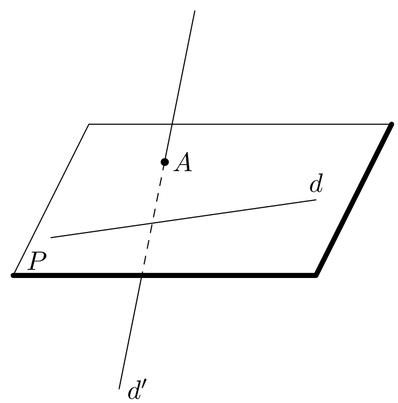
$$ax+by+cz+d=0$$

et une droite d dont on connaît une représentation paramétrique :

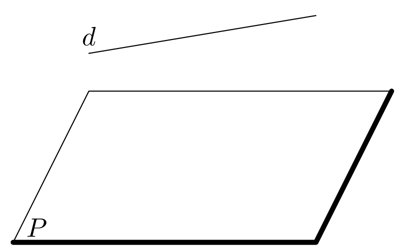
$$\begin{cases} x=\alpha t+x_0 \\ y=\beta t+y_0 \\ z=\gamma t+z_0 \end{cases} \quad \text{où } t\in\mathbb{R}$$

Il n'existe que trois possibilités :

1. la droite et le plan n'ont qu'un point commun, la droite et le plan sont dits sécants,



2. la droite est incluse dans le plan,
3. la droite et le plan n'ont aucun point commun.



C'est le premier cas qui nous intéresse, pour cela supposons que le vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ au plan P et le vecteur directeur $\vec{u}(\alpha;\beta;\gamma)$ ne sont pas orthogonaux (comme dans les cas deux et trois), ainsi P et d sont sécants en un point A.
On cherche alors les coordonnées de A en résolvant l'équation suivante (d'inconnue t) :

$$a(\alpha t+x_0)+b(\beta t+y_0)+c(\gamma t+z_0)=0$$

i.e (en factorisant par t) :

$$t(a\alpha+b\beta+c\gamma)=-x_0-y_0-z_0$$

Comme on a supposé $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0$, on peut diviser par $a\alpha+b\beta+c\gamma\neq 0$ et on obtient :

$$t=\frac{-x_0-y_0-z_0}{a\alpha+b\beta+c\gamma}$$

Finalement, en remplaçant dans le système de représentation paramétrique de d, on trouve les coordonnées de A. Mais obsevons sur un exemple....

Exercice :

Soit $P : 2x - z = 0$ et $d : \begin{cases} x = t-1 \\ y = -3t \\ z = 2 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer les coordonnées du point $A = P \cap d$.

Solutions :

Soit $\vec{n}(2;0;-1)$ un vecteur normal de P et $\vec{u}(1;-3;0)$ un vecteur directeur de d, assurons nous que le point A existe :

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \neq 0$$

Par conséquent A existe nous pouvons déterminer ces coordonnées, en résolvant l'équation suivante :

$$2(t-1) - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2t - 2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow t = 2$$

Ainsi, en remplaçant dans le système paramétrique de d on obtient $A(2-1;-3 : times2;2)$ i.e $A(1;-6;2)$.

2) *Intersection de deux droites*

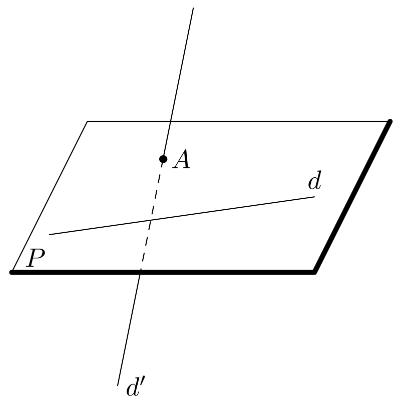
On donne deux droites d et d' dont on connaît les représentations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = \alpha t + x_0 \\ y = \beta t + y_0 \\ z = \gamma t + z_0 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

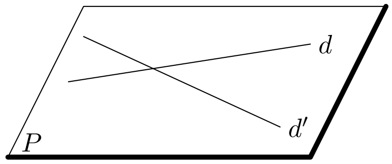
$$d' : \begin{cases} x = \alpha' t' + x_1 \\ y = \beta' t' + y_1 \\ z = \gamma' t' + z_1 \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

d et d' sont deux droites de l'espace. Il n'existe que deux possibilités :

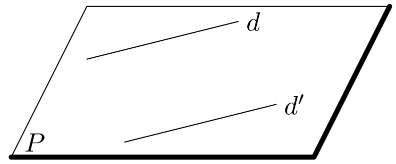
1. il n'existe aucun plan contenant ces deux droites, elles sont dites non coplanaires,



2. il existe un plan contenant ces deux droites, elles sont dites coplanaires (elles sont alors sécantes ou parallèles dans ce plan).



deux droites sécantes



deux droites parallèles

On résout alors le système (qui peut ne pas avoir de solutions) (d'inconnues t et t') :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_0 = \alpha' t' + x_1 \\ \beta t + y_0 = \beta' t' + y_1 \\ \gamma t + z_0 = \gamma' t' + z_1 \end{cases}$$

Exercice :

On donne $A(1;-1;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(3;-2;0)$ et $D(2;-3;3)$.

Etudier l'intersection des droites (AB) et (CD).

Solutions :

$\overrightarrow{AB}(-1;0;1)$ est un vecteur directeur de (AB) par conséquent la droite (AB) admet la représentation paramétrique suivante :

$$(AB) : \begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\overrightarrow{CD}(-1;-1:3)$ est un vecteur directeur de (CD) par conséquent la droite (CD) admet la représentation paramétrique suivante :

$$(CD) : \begin{cases} x = -t' + 3 \\ y = -t' - 2 \\ z = 3t' \end{cases} \qquad t' \in \mathbb{R}$$

On résout le système :

$$\begin{cases} -t + 1 = -t' + 3 \\ -1 = -t' - 2 \\ t = 3t' \end{cases} \iff \begin{cases} -t = -t' + 2 = 1 + 2 = 3 \Rightarrow t = -3 \\ t' = -1 \\ t = 3t' = -3 \end{cases}$$

La troisième équation est compatible avec les deux premières, nous pouvons donc affirmer :

1. le système admet une solution, donc les droites ont une intersection non vide, elles sont coplanaires.
2. Le système admet une unique solution qui est le couple $(t;t') = (-3;-1)$ donc les droites sont sécantes en un point A, dont on obtient les coordonnées en remplaçant t ou t' dans l'une des représentations paramétriques de d ou d' :

$$A(4;-1;-3)$$

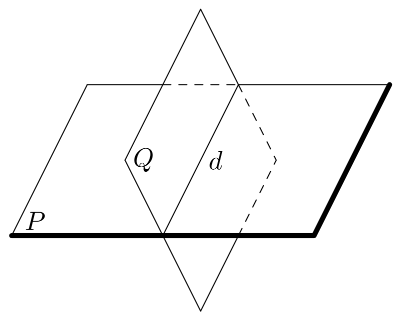
3) Intersection de deux plans

On considère deux plans sécants P et Q d'équations cartésiennes respectives :

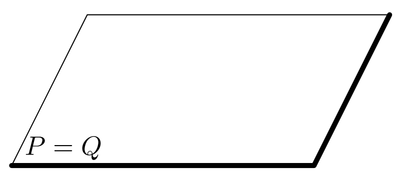
$$\mathrm{P} : ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Q} : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

P et Q sont deux plans de l'espace. Il n'existe que trois possibilités :

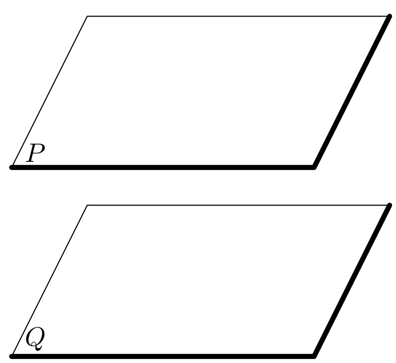
1. les plans ont un point commun et sont distincts, alors ils sont sécants suivant une droite passant par ce point, (ainsi deux plans distincts qui ont deux points communs sont sécants suivant la droite définie par ces deux points)



2. les plans sont confondus,



3. ils n'ont aucun point commun.



Lorsque les deux plans sont sécants, on peut alors récupérer le système de représentation paramétrique de la droite d'intersection en utilisant une des trois coordonnées comme paramètre et en résolvant le système.

Exercice :

Donner une représentation paramétrique de la droite d définie, intersection des plans P et Q d'équations respectives :

$$\mathrm{P} : 2x + y - z - 2 = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q} : x + 3y + 7z - 11 = 0$$

Solutions :

On peut (même si l'énoncé de l'exercice suggère que la droite d existe) s'assurer que P et Q sont sécants. $\overrightarrow{n}(2;1;-1)$ est un vecteur normal de P et $\overrightarrow{n'}(1;3;7)$ est un vecteur normal de Q, P et Q sont sécants si et seulement si $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires, si c'était le cas, alors on aurait $\vec{n} = k\vec{n'}$, dans ce cas on aurait :

$$2 = k \qquad \text{et} 1 = 3 = k \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

ce qui absude, donc P et Q sont deux plans sécants.
Comme $2x + y - z - 2 = 0 \Longrightarrow y = 2x + z + 2$, ainsi :

$$x + 3(2x + z + 2) + 7z - 11 = 0 \Longleftrightarrow 7x + 10z - 5 = 0 \Longleftrightarrow z = -0,7x + 0,5$$

Et du coup :

$$y = 2x - 0,7x + 0,5 + 2 = 0,3x + 2$$

En posant $x = t$, on obtient :

$$d : \begin{cases} x = t \\ y = 0,3t + 2 \\ z = -0,7t + 0,5 \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$