# Chapitre 12

# Vecteurs de l'espace

## 1 Vecteurs de l'Espace

### 1.1 Extension de la notion de vecteur à l'Espace

Dans le plan, un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- sa direction (la droite $(AB)$) ;
- son sens (du point $A$ vers le point $B$) ;
- sa longueur ou norme (la distance $AB$).

Cette notion se généralise sans problème à l'Espace, avec les mêmes propriétés. Par exemple :

**Propriété :** Égalité de vecteurs
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.

### 1.2 Calcul vectoriel dans l'Espace

L'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel sont définies comme dans le plan et ont les mêmes propriétés. Par exemple :

**Propriété 1 :** Relation de Chasles
Pour tous points $A$, $B$ et $C$ de l'Espace : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (voir figure 1).

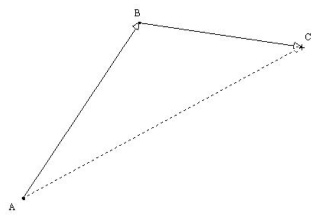
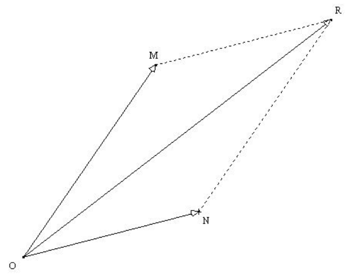



Fig. 1 – Relation de Chasles

**Propriété 2 :** Règle du parallélogramme
$OMRN$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ (voir figure 2)

**Remarques :**

1. Ces deux propriétés donnent les deux manières de construire une somme vectorielle (« bout-à-bout » ou à l'aide d'un parallélogramme).
2. Les règles de calculs sur les sommes de vecteurs et sur les multiplications de vecteurs par un réel sont les mêmes que sur les nombres.




### 1.3 Colinéarité, applications

**Définition :** Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si l'un est le produit de l'autre par un réel $k$ (c'est-à-dire $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$ ou $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$).

**Propriété :** Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont même direction.

**Applications :**

- Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- Les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**Exercice :**
Soit $ABCD$ un tétraèdre et $K$, $L$ et $M$ les points de l'Espace définis par :

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AL} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AD} \qquad \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure.
2. Sur quelle face du tétraèdre se situe le point $K$ ? le point $L$ ?
3. (a) Montrer que les droites $(KL)$ et $(BD)$ sont parallèles.
   (b) Montrer que $K$, $M$ et $B$ sont alignés.
   (c) Montrer que $L$, $M$ et $D$ sont alignés.
   (d) Que peut-on en déduire pour les points $M$, $K$, $L$, $B$ et $D$ ?

### 1.4 Coplanarité

**Définitions :**

1. On dit que quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ de l'espace sont **coplanaires** s'ils sont dans un même plan.
2. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
   Il existe quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$.
   On dit que les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** si et seulement si les quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$ le sont.

**Remarque :** Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, les droites $(AB)$et $(CD)$ sont parallèles et, donc, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.

**Théorème :** (admis)

1. Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, tels que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne soient pas colinéaires.
   Alors, les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :
   $$\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$$
2. Soit $A$, $B$, $C$ et $D$ quatre points de l'espace, tels que $A$, $B$ et $C$ ne soient pas alignés.
   Alors, les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :
   $$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$$