

VECTEURS DE L'ESPACE

I) DEFINITION : Vecteur de l'espace

Définition : Soient A, B deux points dans l'espace \mathcal{E}

Si A et B sont distinctes alors Pour tout point M dans l'espace \mathcal{E} il existe un point unique N dans l'espace \mathcal{E} tel que : $MABN$ est un

parallélogramme et est écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$

Si A et B sont confondues alors : $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{MN}$ (vecteur nul)

Remarques : Si O un point dans l'espace \mathcal{E} alors pour tout vecteur \vec{u} de l'espace il existe un point unique M dans l'espace \mathcal{E} tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$

L'application : $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow V_3$

$M \mapsto \overrightarrow{OM} = \vec{u}$ est une bijection

L'ensemble des vecteurs se note V_3

Un vecteur non nul $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

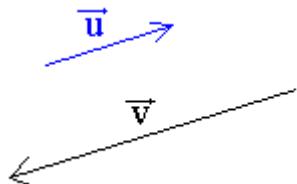
Sa direction : c'est la direction de la droite (AB)

Son sens : de A à B

Sa norme : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$

Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens, la même norme.

Deux vecteurs peuvent avoir la **même direction** de tels vecteurs sont **colinéaires**



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ ssi $ABNM$ est un parallélogramme

II) LES OPERATIONS DANS V_3 .

1) L'addition.

Définition : \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de V_3 ; Soient les points $O : A ; B$

tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OC}$

la somme des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OD}$ tel que : $OBDC$ est un parallélogramme

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$$

Propriété : L'addition dans V_3 a les propriétés suivantes :

L'addition dans V_3 est **commutative** :

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \quad \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$$

L'addition dans V_3 est **associative** $\forall \vec{u} \in V_3$ et

$$\forall \vec{v} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{w} \in V_3$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w})$$

$\vec{0}$ Est l'**élément neutre pour l'addition** dans

$$V_3. \forall \vec{u} \in V_3 : \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$$

Tout vecteur \vec{u} de V_3 admet un **opposé**

$$\text{noté } -\vec{u} : \vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$$

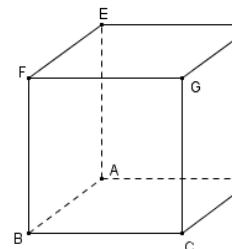
Puisque la somme de deux vecteurs vérifie les quatre propriétés précédentes on dit que :

$(V_3, +)$ est un groupe commutatif.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de V_3 la différence des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est la somme de \vec{u} et de $(-\vec{v})$ et se note : $\vec{u} - \vec{v}$

$$\text{et on a donc : } \vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

Exemple :



ABCDEFGH un cube on pose :

Simplifier :

$$\vec{t} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FH}$$

Solution :

On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$$\vec{t} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{FH}$$

(Relation de Chasles)

$$\vec{t} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}$$

Car $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD}$ ($FHDB$ est un parallélogramme)

$$\vec{t} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{AE} = \vec{0} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE}$$

2) Produit d'un vecteur par un réel.

Définition : $\forall \vec{u} \in V_3$ et $\forall v \in V_3$

Soit \vec{u} un vecteur non nul et k un réel non nul et on pose : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

sur la droite (AB) il existe un seul point C tel que $\overrightarrow{AC} = k\vec{u}$

Le vecteur $\vec{v} = k\vec{AB} = k\vec{u}$ s'appelle le produit du réel k et du vecteur \vec{u}
on pose pour tout k dans \mathbb{R} :

$$k\vec{0} = \vec{0} \text{ et } \forall \vec{u} \in V_3 \quad 0\vec{u} = \vec{0}$$

$$\text{on a : } k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } k = 0$$

Propriété : Le produit d'un vecteur par un réel a les propriétés suivantes :

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$1) \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \quad 2) (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$3) 1\vec{u} = \vec{u} \quad 4) \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$$

Puisque $(V_3, +)$ est un groupe commutatif et le produit d'un réel par un vecteur vérifie les quatre propriétés précédentes on dit que :

$(V_3, +, .)$ est un espace vectoriel réel.

Remarque :

$$\forall \vec{u} \in V_3 \text{ et } \forall \vec{v} \in V_3 \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$1) \alpha(\vec{u} - \vec{v}) = \alpha\vec{u} - \alpha\vec{v} \quad 2) (\alpha - \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} - \beta\vec{u}$$

$$3) \alpha(-\beta\vec{u}) = (-\alpha)(\beta\vec{u}) = -\alpha\beta\vec{u}$$

III) VECTEURS COLINÉAIRES.

1) Vecteur colinéaires

Définition : On dit que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe un réel k tel que :

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

Remarque : Tout vecteur est colinéaire avec lui-même : $\vec{u} = k\vec{u}$

Tout vecteur est colinéaire avec $\vec{0}$

$$\text{car : } \vec{u} \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

On a : $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{CD}$ alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéairesssi $(AB) \parallel (CD)$

Si \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires alors \vec{u} et \vec{v} sont non nuls

A et B et C non alignésssi \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires

A et B et C non alignés $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} / \vec{AC} = k\vec{AB}$

Exemple : ABCDEFGH un cube et K milieu du segment $[EF]$ et L milieu du segment $[CF]$ et M un point du segment $[CD]$ tel que :

$$\vec{CM} = \frac{1}{4}\vec{CD} \quad \text{Montrer que : } (ML) \parallel (DK)$$

Solution : en utilisant la Relation de Chasles

On a : $\vec{ML} = \vec{CL} - \vec{CM}$ et puisque : L milieu du segment $[CF]$ Alors : $\vec{CL} = \frac{1}{2}\vec{CF}$

$$\text{donc : } \vec{ML} = \frac{1}{2}\left(\vec{CF} - \frac{1}{2}\vec{CD}\right) \quad (1)$$

D'autre part On a : $\vec{CK} = \vec{CF} + \vec{FK}$ et $\vec{DK} = \vec{CK} - \vec{CD}$ Donc : $\vec{DK} = \vec{CF} + \vec{FK} - \vec{CD}$ et puisque : K milieu du segment $[EF]$

$$\text{Alors : } \vec{FK} = \frac{1}{2}\vec{FE} \text{ donc : } \vec{FK} = \frac{1}{2}\vec{CD} \text{ (car : } \vec{FE} = \vec{CD})$$

$$\text{Donc : } \vec{DK} = \vec{CF} + \frac{1}{2}\vec{CD} - \vec{CD} = \vec{CF} - \frac{1}{2}\vec{CD} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2) on a : } \vec{ML} = \frac{1}{2}\vec{DK}$$

donc \vec{DK} et \vec{ML} sont colinéaires

$$\text{Donc : } (ML) \parallel (DK)$$

Propriété : Si on a : $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

Exemple : \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non colinéaires

Déterminer les réels x et y tels que :

$$x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v}$$

Solution : $x(\vec{u} + 2\vec{v}) + y(\vec{u} + 3\vec{v}) = 2\vec{u} + 5\vec{v} \Leftrightarrow$

$$(x + y - 2)\vec{u} + (2x + 3y - 5)\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

2) Droite vectorielle

Définition : Soit \vec{u} un vecteur non nul, l'ensemble des vecteurs colinéaires avec le vecteur \vec{u} s'appelle : **la droite vectorielle engendrée par le vecteur \vec{u}** et se note $\Delta_{\vec{u}}$

$$\Delta_{\vec{u}} = \left\{ \vec{v} \in V_3 / \exists k \in \mathbb{R} / \vec{v} = k\vec{u} \right\}$$

$\Delta_{\vec{u}} = \Delta_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires

Si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires

$$\text{alors } \Delta_{\vec{u}} \cap \Delta_{\vec{v}} = \{\vec{0}\}$$

3) Détermination vectorielle d'une droite

Définition : Soient \vec{u} un vecteur non nulle et A un point de l'espace affine \mathcal{E} . L'ensemble des points M dans l'espace \mathcal{E} qui vérifient $\vec{AM} = k\vec{u}$

où k est un réel s'appelle **la droite qui passe par A et de vecteur directeur \vec{u}** . On la note par $D(\vec{A}; \vec{u})$:

$$D(\vec{A}; \vec{u}) = \left\{ M \in \mathcal{E} / \exists k \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \right\}$$

Remarque :

- Le couple (A, \vec{u}) détermine un repère sur la droite $D(\vec{A}; \vec{u})$
- Tout vecteur non nul et colinéaire avec \vec{u} est aussi vecteur Directeur de la droite $D(\vec{A}; \vec{u})$

IV) VECTEURS COPLANAIRES.

1) vecteurs coplanaires.

Rappelle :

Un plan est défini par :

- Trois points non alignés
- Deux droites sécantes ou strictement parallèles.
- Une droite et un point extérieur à cette droite.

Définition : Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs et A un point l'espace

on pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$

On dit que : les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires ssi les points A, B ; C et D sont coplanaires

Propriété : Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs dans l'espaces vectoriel

Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement s'ils existent deux réels x et y

tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

Remarque : si \vec{u} , \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires alors les vecteurssont \vec{w} et \vec{v} et \vec{u} coplanaires

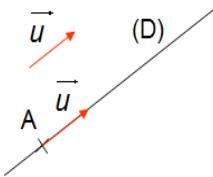
2) Plan vectoriel

Définition : Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs non colinéaires ; l'ensemble des vecteurs \vec{w} dans V_3 qui s'écrivent de la forme : $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où x et y sont des réels s'appelle le plan vectoriel engendré par \vec{u} , \vec{v}

3) Détermination vectoriel d'un plan.

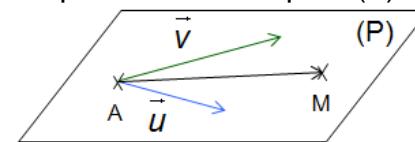
Définition : Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs non colinéaires et A un point de l'espace \mathcal{E} l'ensemble des point M dans l'espace qui vérifient $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ est le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs \vec{u} , \vec{v} , on le note

par : $P(\vec{A}; \vec{u}; \vec{v})$



$$P(\vec{A}; \vec{u}; \vec{v}) = \left\{ M \in \mathcal{E} / \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} \right\}$$

Le triplet $R(\vec{A}; \vec{u}; \vec{v})$ s'appelle un repère du plan (P) et le couple (x, y) s'appelle les coordonnées du point M dans le plan (P) muni du repère R



Exemple : ABCDEFGH un parallélépipède de centre O et I milieu du segment $[AD]$

on pose $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$, $\overrightarrow{FC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{IO} = \vec{w}$

Montrer que : \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires

Solution : On a : $\overrightarrow{EG} = \vec{u}$ et on a $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$

On considère le triangle ADF

et puisque : I milieu du segment $[AD]$

et O milieu du segment $[FD]$

on trouve : $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ Donc : $\overrightarrow{IO} = \overrightarrow{AK}$

et puisque : K milieu du segment $[AF]$

cad $\overrightarrow{AK} = \vec{w}$

et On considérons le point L tel que AFCL est un parallélogramme on trouve : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AL}$

Alors : $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AL}$ et $\overrightarrow{AK} = \vec{w}$

Donc : \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires

Exemple : ABCDEFGH un cube

M milieu du segment $[HE]$ et et N milieu du segment $[HG]$

Les vecteurs \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{AC} sont-ils coplanaires ? justifier

Solution : On considérons le triangle HEG et puisque : M milieu du segment $[HE]$ N milieu

du segment $[HG]$ on trouve : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{MN}$

et puisque $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$: alors $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN}$ donc

Les vecteurs \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires et par suite Les vecteurs \overrightarrow{MN} , \overrightarrow{CH} et \overrightarrow{AC} sont coplanaires

V) PARALLELISME DANS L'ESPACE

1) Parallélisme de deux droites

Définition : Soient \vec{u} , \vec{v} deux vecteurs et A et B deux points de l'espace

1) $D(A; \vec{u}) \parallel D(B; \vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ sont colinéaires

2) A et B et C et D des points tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$: $(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{CD} = k \overrightarrow{AB}$

Exercice 01: ABCD un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points Q ; P ; N ; M tel que :

$$\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AD} \quad \overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CB} \quad \overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{CD} \quad \overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}$$

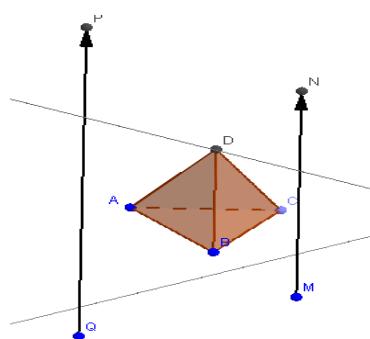
1) Tracer une figure

2) Ecrire \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} en fonction de \overrightarrow{BD}

3) En déduire que \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} sont colinéaires

4) Que peut-on dire des droites (MN) et (PQ)

Solution : 1)



$$2) \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AD} = 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = 2\overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = -3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{CB} = -3(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$$

$$\overrightarrow{PQ} = -3(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}) = -3(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = -3\overrightarrow{BD}$$

$$3) \text{ on a } \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{on a } \overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{BD} \text{ donc } \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{de } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \text{ on trouve : } \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \text{ donc } \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$$

donc : \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} sont colinéaires

4) on a \overrightarrow{MN} et \overrightarrow{PQ} sont colinéaires

Donc (MN) et (PQ) sont parallèles

Exercice 02 : ABCD un tétraèdre et E le milieu du $[BC]$ et soit les points K ; L tel que :

$$\overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ et } \overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Montrer que $(LD) \parallel (EK)$

Solution : pour montrer que $(LD) \parallel (EK)$ il suffit

de montrer que : \overrightarrow{LD} , \overrightarrow{EK} sont colinéaires ??

On a : $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ on utilisant la Relation de Chasles

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

puisque : $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AE}$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{EK} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \right) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Alors : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{et puisque : } \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AL} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \quad \textcircled{2}$$

$$\text{de } \textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \text{ on déduit que : } \overrightarrow{EK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{LD}$$

donc : $(LD) \parallel (EK)$

2) Parallélisme d'une droite et d'un plan.

Propriété : La droite $D(A; \vec{u})$ et le plan P

$P(B; \vec{v}; \vec{w})$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires

$$D(A; \vec{u}) \parallel P(B; \vec{v}; \vec{w}) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

Exemple : ABCDEFGH un cube

K est le symétrique du point D par rapport à H

Montrer que $(AK) \parallel (BCG)$

Solution : on a : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{CG}$

donc : Les vecteurs \overrightarrow{AK} , \overrightarrow{CB} et \overrightarrow{CG} sont coplanaires

on déduit que : $\exists x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} / \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CG}$

donc : $(AK) \parallel (BCG)$

3) Parallélisme de deux plans

Propriété : Deux plans $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ et $Q(B; \vec{u}'; \vec{v}')$

sont parallèles si et seulement si

\vec{u} , \vec{v} et \vec{u}' sont coplanaires et \vec{u} , \vec{v} et \vec{v}' sont coplanaires aussi

Remarque : Une seule condition n'est pas suffisante