



I. Vecteurs de l'espace :

01. Prolongement de la notion d'un vecteur dans le plan à l'espace :

a. notion de vecteur dans l'espace ($\mathcal{E}$):

dans le plan un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par :

- Direction de $\overrightarrow{AB}$: c'est la droite (AB) .
- Sens de $\overrightarrow{AB}$: c'est le sens de A vers B.
- La norme de $\overrightarrow{AB}$ (ou la longueur de $\overrightarrow{AB}$) .est la distance AB on note : $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- Cette notion sera prolongée à l'espace ($\mathcal{E}$) et ainsi toutes les propriétés des vecteurs dans le plan sont valables dans chaque plan de l'espace ($\mathcal{E}$).

b. Exemple :

- I est le milieu de $[AB]$ est équivalent à $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.
- Soient A et B et C trois points non alignés de l'espace ($\mathcal{E}$) donc A et B et C détermine un plan et un seul noté (ABC) .
- Dans le plan (ABC) , on considère le triangle non aplati EFG ; I et J sont respectivement les milieux de $[EF]$ et $[EG]$ donc on peut déduire que $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ et aussi les droites $(IJ) \parallel (FG)$.

c. Remarque :

- Le cas $A = B$ le vecteur $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul) n'a pas de direction et de sens et sa norme est nulle.
- On dit que deux vecteurs sont égaux si ils ont des directions parallèles et même sens et même norme.
- Un quadrilatère ABCD dans l'espace ($\mathcal{E}$) est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

02. Calculs vectoriels dans l'espace :

a. Remarque :

La somme de deux vecteurs et le produit d'un vecteur par un réel sont définis de la même manière que dans la géométrie plane et on a les mêmes propriétés.

Par exemple :

- $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.
- Relation de Chasles $\forall A, B, C \in (\mathcal{E}) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- L'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur qui a même direction et même norme mais sens opposé du sens $\vec{u}$ et on note $-\vec{u}$.
- Le vecteur $\vec{v} = k\vec{u}$:
 - $\vec{v} = k\vec{u}$ a la même direction que $\vec{u}$.
 - $\vec{v} = k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$. $\vec{v} = k\vec{u}$ a le sens opposé que $\vec{u}$ si $k < 0$.



Michel Chasles
(1793 - 1880)



▪ La norme de $\vec{v} = k\vec{u}$ vérifie $\|\vec{v}\| = |k| \|\vec{u}\|$.

➤ Pour tout vecteur $\vec{u}$ on pose $0.\vec{u} = \vec{0}$.

➤ Pour tout $k \in \mathbb{R}$ on a $k.\vec{0} = \vec{0}$.

d. Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace $(\mathcal{E})$ et pour tous réels k et k' on a :

1. $(k + k').\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.

2. $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.

3. $k(k'.\vec{u}) = k'(k\vec{u}) = (k \times k')\vec{u}$.

4. $1.\vec{u} = \vec{u}$.

5. $k.\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow (k = 0 \text{ et } \vec{u} = \vec{0})$.

II. Colinéarité de deux vecteurs – définition vectoriel d'une droite dans l'espace $(\mathcal{E})$.

01. Colinéarité de deux vecteurs – Colinéarité de trois points :

a. Définition :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un α de $\mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$ ou $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.
(c.à.d. l'un des deux vecteurs s'écrit en fonction de l'autre).

b. Remarque :

➤ Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace.

➤ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$.

➤ A et B et C trois points de l'espace $(\mathcal{E})$ sont alignés si et seulement si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

02. Définition vectoriel d'une droite dans l'espace $(\mathcal{E})$:

a. Définition et propriété :

Soient A et B deux points distincts de l'espace $(\mathcal{E})$.

➤ Tout vecteur non nul $\vec{u}$ de l'espace $(\mathcal{E})$ colinéaire avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB) .

➤ L'ensemble des points M de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifient $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ tel que α de $\mathbb{R}$ est la droite (D) qui passe par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on note $D(A, \vec{u})$

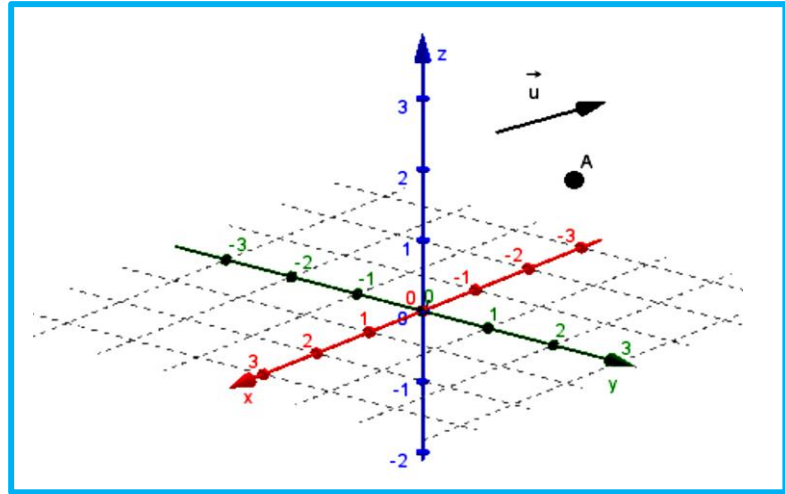
$$\text{d'où : } D(A, \vec{u}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} ; \alpha \in \mathbb{R}\}.$$



b. Exemple :

Soit A un point et $\vec{u}$ est un vecteur non nul de l'espace ($\mathcal{E}$) (voir figure ci contre).

Construire la droite $D(A, \vec{u})$.



III. Vecteurs coplanaires – détermination vectoriel d'un plan dans l'espace :

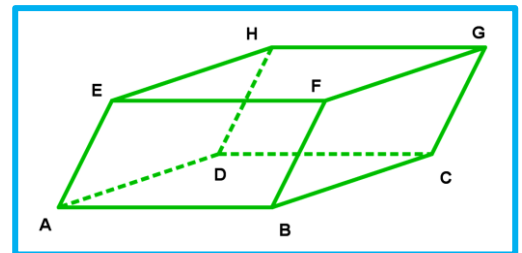
01. Vecteurs coplanaires :

a. Définition et théorème :

- Quatre points A et B et C et D de l'espace ($\mathcal{E}$) sont coplanaires si et seulement si les quatre points appartiennent au même plan .
- Trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace ($\mathcal{E}$) sont coplanaires si et seulement s'il existe quatre points A et B et C et D coplanaires tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

b. Exemple :

ABCDEFGH est parallélépipède trouver 3 vecteurs coplanaires puis 3 vecteurs non coplanaires .



Correction :

- On considère les vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$.
On a : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DG}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{DH}$ et on sait que les points D et C et G et H sont coplanaires d'où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .

- les vecteurs : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires .

c. Remarque :

- Si parmi les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ deux vecteurs sont colinéaires alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires .
- Si trois vecteurs sont constitués par cinq points on ne peut pas confirmer que les cinq points sont coplanaires .**Exemple** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ sont coplanaires car $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{EF}$ sont colinéaires mais les points A et B et D et E et F sont non coplanaires car le point D n'appartient pas au plan déterminé par A et B et E et F .

02. Détermination vectoriel d'un plan dans l'espace :**a.** Définition et théorème :

- Tout plan de l'espace $(\mathcal{E})$ est déterminé par un point donné de l'espace $(\mathcal{E})$ et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non coplanaires de $(\mathcal{E})$.
- Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont appelés vecteurs directeurs du plan, ce plan sera noté $(P) = P(A, \vec{u}, \vec{v})$.
- L'ensemble des points M de l'espace $(\mathcal{E})$ qui vérifient $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ tel que x et y de $\mathbb{R}$ est le plan (P) qui passe par le point A et orienter par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on note $P(A, \vec{u}, \vec{v})$
- d'où : $P(A, \vec{u}, \vec{v}) = \{M \in (\mathcal{E}) / \overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} ; x \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

b. Remarque :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si l'un des trois vecteurs s'écrit en fonction des deux autres.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\exists x, y \in \mathbb{R} / \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Exemple :

$$\vec{AB} = x\vec{AC} + y\vec{AD} \quad (\vec{AB} \text{ s'écrit en fonction de } \vec{AC} \text{ et } \vec{AD})$$

$$\vec{BC} = x\vec{BA} + y\vec{BD} \quad (\vec{BC} \text{ s'écrit en fonction de } \vec{BA} \text{ et } \vec{BD})$$

- Le vecteur nul est coplanaire avec deux autres vecteurs de l'espace $(\mathcal{E})$.

c. Exercice :

On considère les points les points A et B et C et D et E de l'espace $(\mathcal{E})$ tel que :

$$(1) : 2\vec{EA} + 4\vec{EB} - 5\vec{EC} - \vec{ED} = \vec{0}.$$

1. Montrer que : les points A et B et C et D sont coplanaires.

Correction :

On a :

$$(1) \Leftrightarrow 2\vec{EA} + 4\vec{EB} - 5\vec{EC} - \vec{ED} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\vec{EA} + 4(\vec{EA} + \vec{AB}) - 5(\vec{EA} + \vec{AC}) - (\vec{EA} + \vec{AD}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\vec{AB} - 5\vec{AC} - \vec{AD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{AD} = 4\vec{AB} - 5\vec{AC}$$

D'où : $\vec{AD} = 4\vec{AB} - 5\vec{AC}$ donc le vecteur $\vec{AD}$ est écrit en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

Donc les vecteurs : $\vec{AD}$ et $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires.

D'où : les points A et B et C et D sont coplanaires.

Conclusion : les points A et B et C et D sont coplanaires.

IV. Parallélisme dans l'espace :

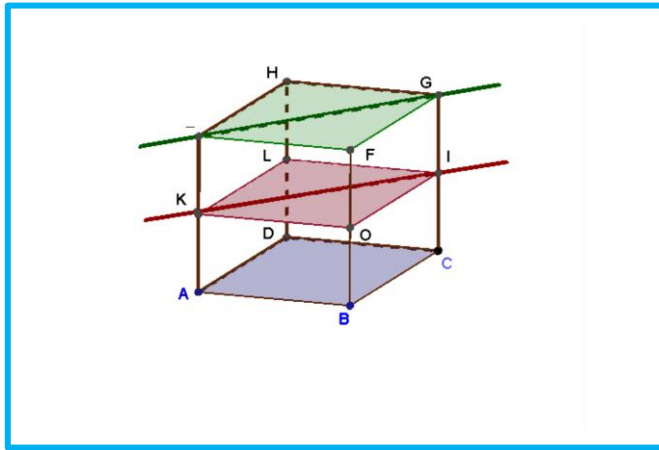
01. Parallélisme des droites dans l'espace ($\mathcal{E}$):

a. Définition :

$D(A, \vec{u})$ et $\Delta(B, \vec{v})$ sont deux droites de l'espace ($\mathcal{E}$).

$\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow (\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires})$ ou encore $\Delta(B, \vec{v}) \parallel D(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \vec{v} = \alpha \vec{u} ; \alpha \in \mathbb{R}^*$.

b. Exemple :



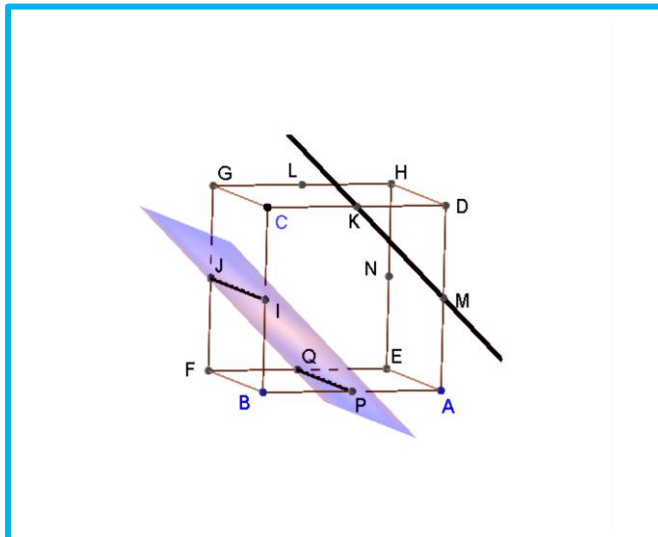
02. Parallélisme d'une droite et d'un plan de l'espace ($\mathcal{E}$):

a. Définition :

$D(A, \vec{u})$ et $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ sont une droite et un plan de l'espace ($\mathcal{E}$).

la droite $D(A, \vec{u})$ est parallèle au plan $P(B, \vec{v}, \vec{w})$ si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ou encore $D(A, \vec{u}) \parallel P(B, \vec{v}, \vec{w}) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R}$.

b. Exemple :





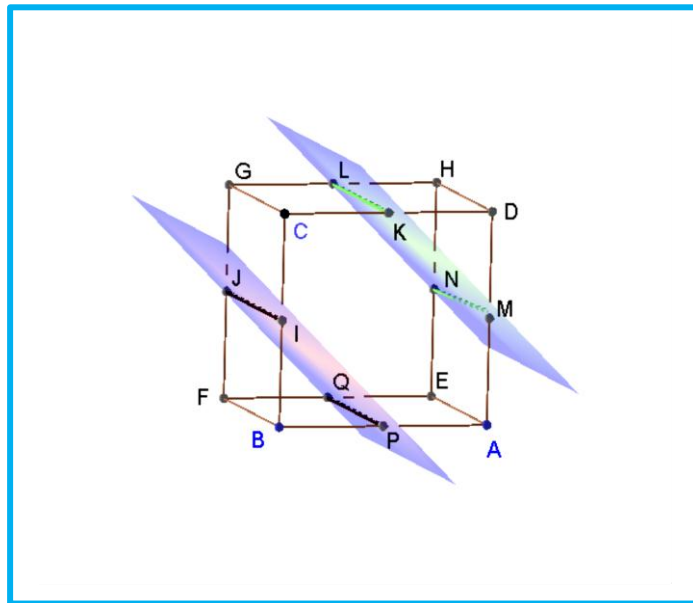
03. Parallélisme de deux plans dans l'espace ($\mathcal{E}$):

a. Définition :

$P(B, \vec{v}, \vec{w})$ et $Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ sont deux plans parallèles dans l'espace ($\mathcal{E}$) si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{u}_1$ et $\vec{v}_1$ sont coplanaires ou encore.

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}) \parallel Q(B, \vec{u}_1, \vec{v}_1) \Leftrightarrow (\vec{u}_1 = x\vec{v} + y\vec{w} / x, y \in \mathbb{R} \text{ et } \vec{u}_2 = x'\vec{v} + y'\vec{w} / x', y' \in \mathbb{R})$$

b. Exemple :



04. Exercice :

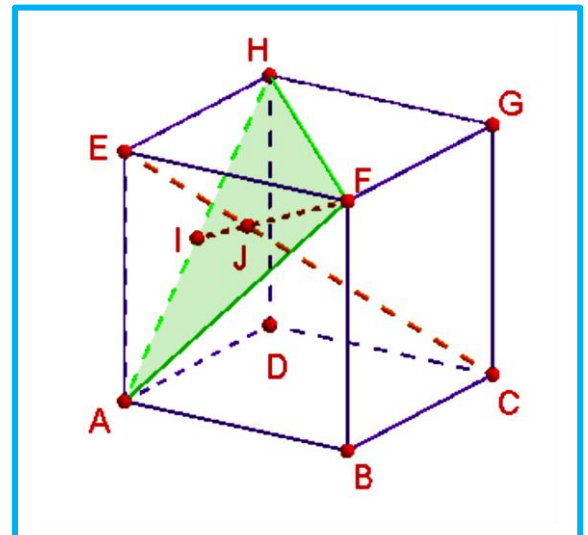
On considère un cube ABCDEFGH, tel que I est le milieu de [AH] et J est un point de [FI]

tel que : $\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}$.

1. Construire la figure .
2. Montrer que : $\vec{EC} = -\vec{AE} + \vec{AB} + \vec{AD}$.
3. Montrer que : $\vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{EC}$.
4. Que peut-on conclure pour les points E et J et C .

Correction :

1. On construit une figure :





2. Montrons que : $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$:

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} ; (\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

3. Montrons que : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$:

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EJ} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FI} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AI}) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH})\right) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}\right) \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{EH} \\ &= \overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \quad (\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{EC} ; (\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\end{aligned}$$

Conclusion : $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$.

4. Dédution pour les points E et J et C :

Puisque $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{EC}$ sont colinéaires par suite les points E et J et C sont colinéaires.

Conclusion : les points E et J et C sont colinéaires.