# Exercices corrigés

## Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$ d'unité 1 cm sur $Ox$ et $0,5$ cm sur $Oy$.

### Partie A : Étude d'une fonction polynôme de degré 2

On note $C_f$ la courbe représentative de la fonction $f$ définie sur $[-3,4]$ par

$$f(x)=\frac{3}{2}x^2-1$$

1. (a) Déterminer $f'$, la fonction dérivée de $f$.
   (b) Établir le tableau de variation de $f$ sur $[-3;4]$.
2. Déterminer une équation de $T$, la tangente à la courbe $C_f$ au point d'abscisse $-1$.
3. Tracer la tangente $T$ puis la courbe $C_f$ dans le repère $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$

### Partie B : Étude d'une fonction polynôme de degré 3

On considère $C_g$, la courbe représentative de la fonction $g$ définie sur $[-3,4]$ par

$$g(x)=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-1$$

1. (a) Déterminer la fonction dérivée $g'$.
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$. En déduire le tableau de variation de $g$ sur $[-3,4]$.
   (c) Combien l'équation $g(x)=0$ admet-elle de solution(s) sur $[-3,4]$ (Justifier).
   On note $\alpha$ la plus grande de ces solutions.
   (d) Déterminer un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$ .
2. Déterminer, par le calcul, les coordonnées des points d'intersection des courbes $C_f$ et $C_g$.
3. Tracer la courbe $C_g$ dans le repère orthogonal $(O;\overrightarrow{\imath};\overrightarrow{\jmath})$.

# Correction de l'exercice 1

## Partie A

1. (a) On trouve $f'(x) = 3x$

   (b) d'où le tableau de variations :

| $x$ | $-3$ | | $0$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| Variations de $f$ | $\frac{25}{2}$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $23$ |

2. On a $f(-1) = \frac{1}{2}$ et $f'(-1) = -3$ d'où l'équation de la tangente cherchée est :
   $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -3(x+1) + \frac{1}{2} = -3x - \frac{5}{2}$
3. Voir graphe

## Partie B

1. (a) Le calcul de la fonction dérivée donne $g'(x) = -3x^2 + 3x + 6$

   (b) Pour déterminer le signe de $g'(x)$, on calcule le discriminant $\Delta$, ici égal à 81, ce qui nous donne les deux racines $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$.
   Or, un polynôme du second degré est du signe de $a$ (ici négatif) sauf entre les racines d'où le tableau de variations de $g$ :

| $x$ | $-3$ | | $-1$ | | $2$ | | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| Variations de $g$ | $\frac{43}{2}$ | $\searrow$ | $-\frac{9}{2}$ | $\nearrow$ | $9$ | $\searrow$ | $-17$ |

   (c) $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[-3; -1]$ avec $g(-3) > 0$ et $g(-1) < 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[-3; -1]$.
   $g$ est strictement croissante sur l'intervalle $[-1; 2]$ avec $g(-1) < 0$ et $g(2) > 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $[-1; 2]$.
   $g$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[2; 4]$ avec $g(2) > 0$ et $g(4) < 0$.
   L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha$ sur l'intervalle $[2; 4]$.
   Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet donc trois solutions sur l'intervalle $[-3; 4]$.

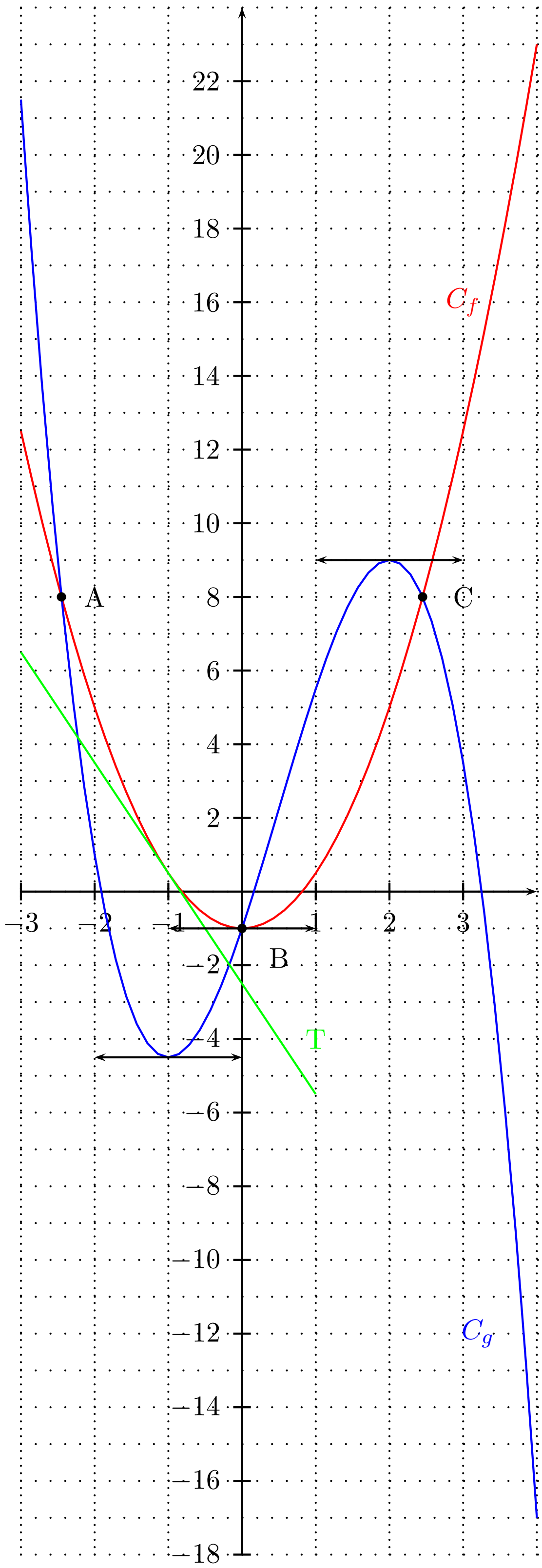
   (d) $\alpha$ appartient à l'intervalle $[2; 4]$, de plus, $g(3) = 3,5$ qui est positif. On fait donc une table de valeurs avec la calculatrice avec des valeurs allant de 3 à 4 par pas de $0,1$.
   On trouve $g(3,2) = 0,79 > 0$ et $g(3,3) = -0,80 < 0$ donc : $3,2 < \alpha < 3,3$.
   On réitère le même procédé cette fois-ci sur l'intervalle $[3,2; 3,3]$ par pas de $0,01$.
   On obtient $g(3,25) = 0,02 > 0$ et $g(3,26) = -0,14 < 0$ donc : $3,25 < \alpha < 3,26$.

2. Pour déterminer l'intersection des deux courbes, il faut résoudre le système $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

   On obtient alors pour $x$ : $\frac{3}{2}x^2 - 1 = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 1 \iff -x^3 + 6x = 0 \iff x(-x^2 + 6) = 0$
   d'où les solutions : $x = 0$, $x = \sqrt{6}$ et $x = -\sqrt{6}$

   Les points d'intersection sont donc les points : A$\begin{pmatrix} -\sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et C$\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 8 \end{pmatrix}$.

3.



## Exercice 2.

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

- $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2 - x}$ pour $x \neq 2$.
- $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ ?
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$
   En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$ ?
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de $g$ en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.
   (b) En déduire les limites de $f$ en $2^+$ puis en $2^-$ ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
5. (a) Pour tout $x \neq 2$ calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

## Exercice 3

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

- $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x - 1}$ pour $x \neq 1$.
- $g(x) = \dfrac{\cos x + 1}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ ?
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
$$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x}$$
   En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$ ?
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de $g$ en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $x - 1$.
   (b) En déduire les limites de $f$ en $1^+$ puis en $1^-$ ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.
   (b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$.

## Solution de l'exercice 2

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

- $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2 - x}$ pour $x \neq 2$.
- $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :
   Pour tout $x \neq 0$ :
   $$f(x) = \frac{x^2\left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(\dfrac{2}{x} - 1\right)} = x\frac{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x} - 1}$$
   On a :
   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{2}{x} - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$
   Et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
   De même comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ on a par produit :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ ?
   Les limites en $\pm\infty$ de $f$ valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
   $$-\frac{1}{x} \leq g(x) \leq \frac{1}{x}$$
   $$\forall x > 0, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$
   En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$ ?
   Du résultat précédent on déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de $g$ en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
   On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :
   $$\forall x < 0, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \frac{1}{x}$$
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{1}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
   $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$
   On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $2 - x$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2-x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

(b) En déduire les limites de $f$ en $2^+$ puis en $2^-$ ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
D'après le tableau de signe précédent lorsque $x>2$ on a $2-x<0$ par conséquent :

$$\lim_{x\to 2^+} 2-x=0^-$$

De plus $\lim\limits_{x\to 2^+} x^2-x+1=4-2+1=3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=-\infty$$

De même, lorsque $x<2$ on a $2-x>0$ donc :

$$\lim_{x\to 2^-} 2-x=0^+$$

De plus $\lim\limits_{x\to 2^-} x^2-x+1=4-2+1=3$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=+\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x=2$.

5. (a) Pour tout $x\neq 2$ calculer $f'(x)$.
Pour tout $x\neq 2$ $f$ est dérivable et on a :

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(2-x)-(-1)\times(x^2-x+1)}{(2-x)^2}=\frac{4x-2x^2-2+x+x^2-x+1}{(2-x)^2}=\frac{-x^2+4x-1}{(2-x)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.
Pour tout $x\neq 2$, $(2-x)^2>0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+4x-1$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.
$\Delta=16-4=12$, ce polynôme admet deux racines :

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{12}}{-2}=2-\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad x_2=2+\sqrt{3}$$

On obtient alors le tableau de signe de $f'$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

(c) Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$.
On déduit du tableau de signe de la dérivée :

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $2$ | | $2+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $f(2-\sqrt{3})$ | $\nearrow$ | $\|$ | $\nearrow$ | $f(2+\sqrt{3})$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

## Solution de l'exercice 3

On considère les fonctions $f$ et $g$ définies par :

- $f(x) = \dfrac{-x^2+x+1}{x-1}$ pour $x \neq 1$.
- $g(x) = \dfrac{\cos x + 1}{x}$ pour $x \neq 0$.

1. (a) Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   On transforme l'expression $f(x)$ (because FI) :
   Pour tout $x \neq 0$ :
   $$f(x) = \frac{x^2\left(-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = x\frac{-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}}$$
   On a :
   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x}} = \frac{-1}{1} = -1$$
   Et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc par produit on obtient :
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
   De même comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ on a par produit :
   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
   (b) Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_f$ en $\pm\infty$ ?
   Les limites en $\pm\infty$ de $f$ valent $\pm\infty$ on ne peut donc pas en déduire l'existence d'asymptote horizontale.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a :
   $$0 \leq g(x) \leq \frac{2}{x}$$
   $$\forall x > 0, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Longleftrightarrow 0 \leq \frac{\cos x + 1}{x} \leq \frac{2}{x}$$
   En déduire la limite de $g$ en $+\infty$.
   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
   $$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$
   Peut-on en déduire l'existence d'une asymptote pour la représentation graphique $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$ ?
   Du résultat précédent on déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
3. Déterminer, en vous inspirant de la question précédente, la limite de $g$ en $-\infty$ et en déduire l'existence d'une asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$ que l'on précisera.
   On refait la même chose mais pour $x < 0$, ce qui donne :
   $$\forall x < 0, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Longleftrightarrow 0 \geq \frac{\cos x + 1}{x} \geq \frac{2}{x}$$
   On a $\lim\limits_{x\to-\infty} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x}$ donc d'après le théorème des gendarmes on a :
   $$\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$$
   On en déduit que $\mathscr{C}_g$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$.
4. (a) Etablir le tableau de signe de $x-1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

(b) En déduire les limites de $f$ en $1^+$ puis en $1^-$ ; en déduire l'existence d'asymptote à $\mathscr{C}_f$ que l'on précisera.
D'après le tableau de signe précédent lorsque $x > 1$ on a $x-1>0$ par conséquent :

$$\lim_{x\to 1^+} x-1 = 0^+$$

De plus $\lim_{x\to 1^+} -x^2+x+1 = -1+1+1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

De même, lorsque $x < 1$ on a $x-1<0$ donc :

$$\lim_{x\to 1^-} x-1 = 0^-$$

De plus $\lim_{x\to 1^-} -x^2+x+1 = -1+1+1 = 1$, par quotient on obtient alors :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

On en déduit l'existence d'une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

5. (a) Pour tout $x \neq 1$ calculer $f'(x)$.
Pour tout $x \neq 1$ $f$ est dérivable et on a :

$$f'(x) = \frac{(-2x+1)(x-1)-1\times(-x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2x^2+2x+x-1+x^2-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$

(b) Etudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x$.
Pour tout $x \neq 1$, $(x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+2x-2$, polynôme dont nous allons dresser le tableau de signe.
$\Delta = 4-8 = -4 < 0$, ce polynôme n'admet pas de racine donc il est de signe constant. Ici on a pour tout $x \neq 1$, $-x^2+x+1 < 0$. On obtient alors le tableau de signe de $f'$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |

(c) Dresser le tableau de variation complet de $f$ sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.
On déduit du tableau de signe de la dérivée :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\Vert$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

# Exercice 4

*f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité graphique : 2 cm).

**Etude de la fonction *f***

1) a) Trouver les limites de *f* en + ∞ et en - ∞.
   b) Etudier les variations de *f* et dresser son tableau de variations.
2) a) Trouver une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
   b) Etudier la position de T par rapport à $\mathscr{C}$.
3) Tracer T et la courbe $\mathscr{C}$.

## Solution de l'exercice 4

**Etude de la fonction f**

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{|x|} - 1 = -2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{|x|} - 1 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)} - 1$

avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = \sqrt{x^2+1}$

$f'(x) = \dfrac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$

$u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \dfrac{x^2+1-x(x+1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$f'(x)$ est du signe de $1 - x$

Tableau de variations de f :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f' | | + | | – | |
| f($x$) | $-2$ | ↗ | $\sqrt{2} - 1$ | ↘ | $0$ |

$f(1) = \dfrac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$

2) a) Une équation de la tangente T au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$

Une équation de T est donc $y = x$.

b) $f(x) - x = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = (x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$

$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 1 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2+1} > 1 \Rightarrow x^2 + 1 < 1 \Rightarrow x^2 < 0$

Impossible car un carré est toujours positif.

Donc $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$ pour tout x réel.

$f(x) - x$ est donc du signe de $-(x + 1)$

Si $x < -1$ alors $f(x) - x > 0$ : la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de T.

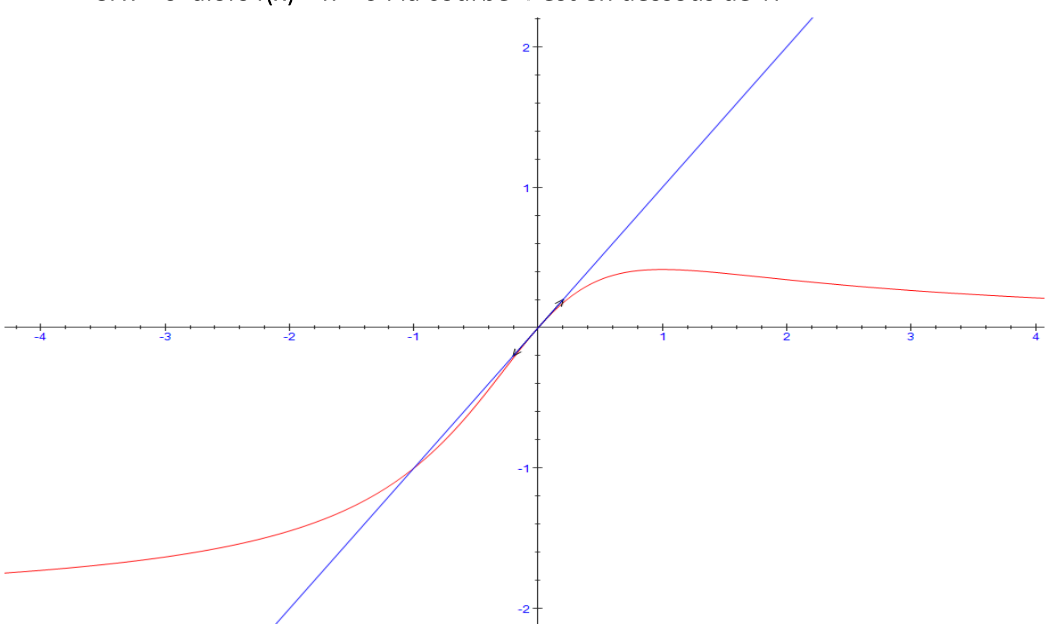
Si $x = -1$ alors $f(x) = x$ : la courbe $\mathscr{C}$ et T se coupent au point (-1 ;-1)

Si $-1 < x < 0$ alors $f(x) - x < 0$ : la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

Si $x = 0$ alors $f(x) = x$ : la courbe $\mathscr{C}$ et T se coupent au point (0 ;0)

Si $x > 0$ alors $f(x) - x < 0$ : la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de T.

3)



## Exercice 5

1. On considère la fonction $g$ définie sur l'intervalle I = $[\,0\,;\,\frac{\pi}{4}\,]$ par $g(x) = tan(x) - x$.

a) Etudier les variations de la fonction $g$ et en déduire son signe.

b) Montrer que, pour tout $x$ de I, on a $0 \le tan(x) \le 1$.

c) On considère la fonction $h$ définie sur I par $h(x) = tan(x) - 2x$. Montrer que la dérivée de $h$ peut s'écrire $h'(x) = tan^2(x) - 1$. Etudier les variations de $h$ et en déduire son signe .

2. On considère la fonction $f$ définie sur I par $f(x) = tan(x) - x - \frac{4x^3}{3}$ .

a) Montrer que la dérivée de $f$ peut s'écrire $f'(x) = (tan(x) + 2x)(tan(x) - 2x)$. En déduire le signe de $f'$ .

b) Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ et en déduire son signe.

c) Montrer que, pour tout $x$ de I, on a $x \le tan(x) \le x + \frac{4x^3}{3}$.

3. Calculer les deux limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{tan\,x - x}{x^2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\,x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}\right)$ .

## Solution de l'exercice 5

1. a) La fonction $g$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $g'(x) = tan^2(x) + 1 - 1 = tan^2(x)$ est positif ; donc la fonction $g$ est croissante sur I et comme $g(0) = 0$, la fonction $g$ est positive sur I.

b) Pour tout $x$ de I, on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \le cos(x) \le 1$ donc $1 \le \frac{1}{cos(x)} \le \sqrt{2}$ et $0 \le sin(x) \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $0 \le tan(x) \le 1$.

c) La fonction $h$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $h'(x) = tan^2(x) + 1 - 2 = tan^2(x) - 1$ ; d'après la question précédente, $h'(x)$ est négative et donc $h$ est décroissante sur I ; de plus, $h(0) = 0$, donc $h$ est négative sur I.

2. a) La fonction $f$ est dérivable comme somme de fonctions dérivables ; $f'(x) = tan^2(x) + 1 - 1 - 4x^2 = tan^2(x) - 4x^2$ ; donc $f'(x) = (tan(x) + 2x)(tan(x) - 2x)$ ; d'après les questions précédentes, $tan(x) - 2x \le 0$ et $tan(x) + 2x \ge 0$ donc $f'(x)$ est négative et donc $f$ est décroissante sur I ; de plus, $f(0) = 0$, donc $f$ est négative sur I.

b) Le tableau de variations de $f$ : ( Le signe de $f$ sur I : $f(x) \le 0$ )

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $\pi/4$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ |
| $f(x)$ | $0 \searrow f(\pi/4)$ |

c) Pour tout $x$ de I, on a $g(x) \ge 0$ et $f(x) \le 0$, donc $x \le tan(x) \le x + \frac{4x^3}{3}$.

3. Pour tout $x$ de I, on a $0 \le tan(x) - x \le \frac{4x^3}{3}$ et si $x \ne 0$, $0 \le \frac{tan(x) - x}{x^2} \le \frac{4x}{3}$. Comme $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{4x}{3} = 0$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{tan\,x - x}{x^2} = 0$ . La fonction tangente est dérivable sur I, donc

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\,x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}\right)$ est le nombre dérivé de $tan(x)$ en $\frac{\pi}{4}$, car $tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ ; donc $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{tan\,x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}\right) = tan'(\frac{\pi}{4}) = tan^2(\frac{\pi}{4}) + 1 = 2$ .

## Exercice 6

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que pour tout réel $x$, $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.

b) En déduire les limites de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$ .
c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.
2. On note $(d_1)$ et $(d_2)$ les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$.
Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite $(d_1)$, puis avec la droite $(d_2)$ .
3. a) Déterminer la fonction dérivée $f'$ de $f$. Montrer que pour tout réel $x$, $f'(x) = 1 - \sin(2x)$.
b) En déduire le sens de variations de la fonction $f$.
c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.
4. a) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0; \pi]$.
b) Tracer $(d_1)$, $(d_2)$ et la représentation graphique de $f$ sur $[0; \pi]$.
5. a) Démontrer que pour tout réel $x$, $f(x + \pi) = f(x) + \pi$ .
b) Comment déduit-on la courbe C de la représentation graphique de $f$ sur $[0; \pi]$ ?

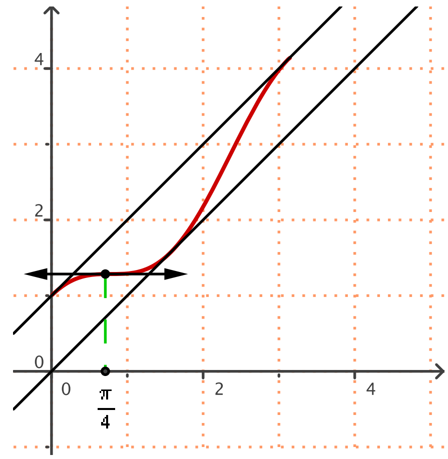
## Solution de l'exercice 6

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \cos^2(x)$ et C sa courbe représentative.
1. a) Pour tout réel $x$, on sait que $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \cos^2(x) \leqslant 1$, et $x \leqslant f(x) \leqslant x + 1$.
b) On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$ , donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$ , donc par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
c) L'encadrement précédent permet d'affirmer que la courbe C est située entre la droite d'équation $y = x$ et la droite d'équation $y = x + 1$.
2. Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite $(d_1)$ sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 0$, soit $\cos(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $\frac{\pi}{2} + k\pi$ .
Les abscisses des points d'intersection de la courbe C avec la droite $(d_2)$ sont les solutions de l'équation : $f(x) = x + 1$, qui équivaut à $\cos^2(x) = 1$, soit $\cos(x) = 1$ ou $\cos(x) = -1$. Les solutions de ces équations sont les nombres $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les ordonnées respectives sont $k\pi + 1$.
3. a) La fonction $f$ est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. La dérivée de $\cos x$ est $-\sin x$, et la dérivée de $u^2$ est $2uu'$. D'où, pour tout réel $x$, $f'(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x) = 1 - \sin(2x)$.
b) On sait que, pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $-1 \leqslant -\sin(2x) \leqslant 1$, et $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2$ . Donc la dérivée est positive et la fonction $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) L'équation $f'(x) = 0$ équivaut à $\sin(2x) = 1$, équivaut à $2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. a) Le tableau de variations de $f$ sur $[0; \pi]$:

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $\pi + 1$ |




b) Représentation graphique de $f$ sur $[0; \pi]$:

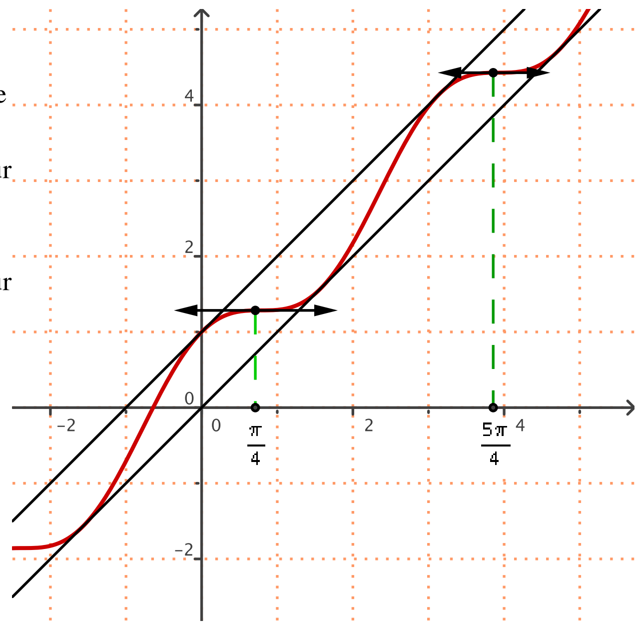
5. a) Pour tout réel $x$, on a $f(x + \pi) = x + \pi + \cos^2(x+ \pi) = x + \pi + \cos^2(x)$ car $\cos(x+ \pi) = -\cos(x)$, donc $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

b) Pour $x \in [0; \pi]$, soit $M(x; y)$ un point de la courbe C.

Comme $f(x + \pi) = f(x) + \pi$, le point de la courbe d'abscisse $(x + \pi)$ a pour ordonnée $f(x + \pi) = f(x) + \pi = y + \pi$.

On déduit la courbe C de la représentation graphique de $f$ sur $[\pi; 2\pi]$ par une translation de vecteur $\pi \vec{i} + \pi \vec{j} = \pi(\vec{i} + \vec{j})$. Etc...

On déduit la courbe C de la représentation graphique de $f$ sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteur $k\pi \vec{i} + k\pi \vec{j}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.




## Exercice 7

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} - x$.

1. Préciser l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$.

2. a) Montrer que pour tout réel $x$ de $D_f$, $f(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$. En déduire la limite de la fonction $f$ en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

c) Préciser les éventuelles asymptotes à la courbe $C_f$.

3. Montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe $C_f$.

4. Étude de la dérivabilité de $f$ en $-1$ et en $1$:

a) Montrer que $\dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1$. En déduire $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{f(x) - f(-1)}{x+1}$. La fonction $f$ est-elle dérivable en $-1$ ?

b) La fonction $f$ est-elle dérivable en $1$ ?

5. a) Étudier les variations de la fonction $f$ sur son ensemble de dérivabilité.

b) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $D_f$.

6. Tracer la courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses $-2$, $-1$, $1$ et $2$.

## *Solution de l'exercice 7*

1.l'ensemble de définition $D_f$ de la fonction $f$ est l'ensemble des réels $x$ tels que $x^2 - 1 \geqslant 0$. Soit $x^2 \geqslant 1$, soit $x \in ]-\infty ; -1] \cup [1; +\infty[$. Donc $D_f = ]-\infty ; -1] \cup [1; +\infty[$.

2. a) Pour tout réel $x$ de $D_f$, $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}$ en utilisant l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

c) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, la courbe $C_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses) en $+\infty$.

3. Pour montrer que la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à $C_f$, on étudie $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-2x)) = \lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2-1}+x)$. On peut écrire $\sqrt{x^2-1}+x = \dfrac{(x^2-1)-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x} = \dfrac{-1}{f(x)}$ et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-2x)) = 0$. Donc la droite d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe $C_f$ en $-\infty$.

4. Étude de la dérivabilité de $f$ en $-1$ et en 1:

a) Pour $x < -1$: $x - 1 < 0$, d'où $-x + 1 > 0$ et $-x - 1 > 0$. Ainsi $\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x-1}{x+1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x+1)^2}} - 1 = \dfrac{\sqrt{(-x+1)(-x-1)}}{\sqrt{(-x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\dfrac{-x+1}{-x-1}} - 1 = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1$. D'où $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to-1} \left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} - 1\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{x\to-1} (x-1) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} (x+1) = 0^-$ et $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$. La fonction $f$ n'est pas dérivable en $-1$.

b) Pour $x > 1$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x+1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{\sqrt{(x-1)^2}} - 1 = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1$.

D'où $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1} \left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$. La fonction $f$ n'est pas dérivable en 1.

5. a) La fonction $f$ est dérivable sur $]-\infty ; -1[ \cup ]1; +\infty[$ comme somme et composée de fonctions qui le sont.

D'où $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - 1 = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}$. Le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur:

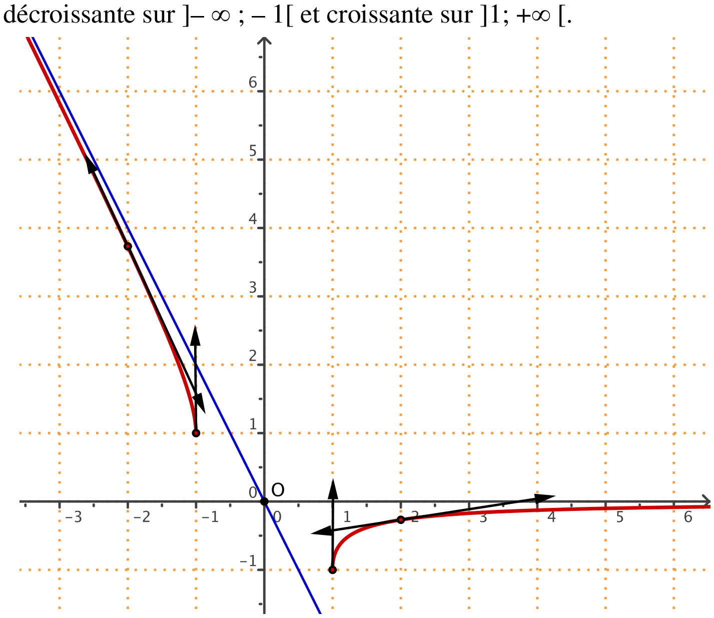
Si $x < -1$, $x$ et $-\sqrt{x^2-1}$ sont négatifs, donc $f'(x) \leqslant 0$.

Si $x > 1$, on a $0 \leqslant x^2 - 1 \leqslant x^2$, donc $\sqrt{x^2-1} \leqslant x$ par la croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$; et $x - \sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, donc $f'(x) \geqslant 0$. La fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et croissante sur $]1; +\infty[$.

b) Le tableau de variations de $f$ sur $D_f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | Non définie | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $1$ | Non définie | $-1$ | ↗ | $0$ |

6. La courbe ainsi que les tangentes aux points d'abscisses $-2$, $-1$, 1 et 2:



## Exercice 8

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$ .

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction $f$ est $D_f = \mathbb{R}$ .
2. Étudier la parité de la fonction $f$.
3. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. a) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C représentative de la fonction $f$.

b) En utilisant la question 2, déterminer une autre asymptote oblique à C.

5. Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ .
6. Dresser le tableau de variations de $f$ sur $D_f$ .
7. Préciser l'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1.
8. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

## Solution de l'exercice 8

1. Pour tout réel $x$ , $x^2 + 1$ est strictement positif, donc $\sqrt{x^2+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et donc l'ensemble de définition de la fonction $f$ est $D_f = \mathbb{R}$ .

2. $D_f$ est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout réel $x$, $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} - 1 = \sqrt{x^2+1} - 1 = f(x)$ . Donc la fonction $f$ est paire.

3. Comme $f$ est paire, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ . On sait que $\lim_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty$ et que $\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ , donc en utilisant les limites de fonctions composées, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

4. a) Pour montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à la courbe C , on étudie la limite:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

car $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$. Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.

b) Par symétrie, la droite d'équation $y = - x - 1$ est asymptote oblique à C en $-\infty$.

5. La fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ . D'où la dérivée de $f$ est $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ qui est du signe de $x$ . La fonction $f$ est donc décroissante dur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

6. Le tableau de variations de $f$ sur $D_f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

7. L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 1 est

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 .$$

8. L'équation $f(x) = 0$ équivaut à $\sqrt{x^2+1} = 1$ , soit $x^2 + 1 = 1$, soit $x^2 = 0$. La seule solution est 0.

## *Exercice 9*

On considère la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$ .

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f$.
2. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
3. a) Montrer que pour $x \in ]-\infty\,;1[$, $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$ .

   b) La fonction $f$ est-elle dérivable en 1 ?
4. Étudier les variations de $f$ sur l'ensemble $]-\infty\,;1[ \cup ]3;+\infty[$.
5. Dresser le tableau de variations de $f$.
6. Montrer que les droites d'équation $y = x - 2$ et $y = -x + 2$ sont asymptotes obliques à la courbe C représentative de $f$.

## *Exercice 10*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ .

1. Étudier la parité de la fonction $f$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.
3. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.
4. Déduire des questions 1 et 3 que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.
5. Que peut-on déduire des questions 1, 3 et 4 pour la courbe C représentative de la fonction $f$ ?

## *Solution de l'exercice 9*

1. L'ensemble de définition de la fonction $f$ est l'ensemble des réels $x$ tels que $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$.

Le discriminant $\Delta = 16 - 12 = 4 > 0$, donc il y a deux racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. Le signe de $x^2 - 4x + 3$ est positif pour les valeurs à l'extérieur des racines; soit $D_f = ]-\infty\,;1] \cup [3;+\infty[$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ en utilisant la propriété: la limite d'un polynôme à l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ , alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. De même, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3) = 0$.

3. a) Pour $x \in ]-\infty\,;1[$, $x - 1 = -\sqrt{(x-1)^2}$ , d'où $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{(x-1)(x-3)}}{-\sqrt{(x-1)^2}} = -\sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}}$ .

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1) = 0^{-¿}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-3) = -2$ , donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{x-3}{x-1} = +\infty$ , $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\dfrac{x-3}{x-1}} = +\infty$ , et la fonction $f$ n'est pas dérivable en 1.

4. La fonction $f$ est dérivable sur $]-\infty\,;1[\,\cup\,]3;+\infty[$ comme composée de fonctions qui le sont.

On sait que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, donc $f'(x) = \dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+3}} = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$ qui est du signe de $x-2$ puisque le dénominateur est strictement positif. Ainsi la fonction $f$ est

Étudier les variations de $f$ sur l'ensemble $]-\infty\,;1[\,\cup\,]3;+\infty[$.

5. Le tableau de variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

6. On a $f(x)-(x-2) = \sqrt{x^2-4x+3} - (x-2) = \dfrac{x^2-4x+3-(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)}$.

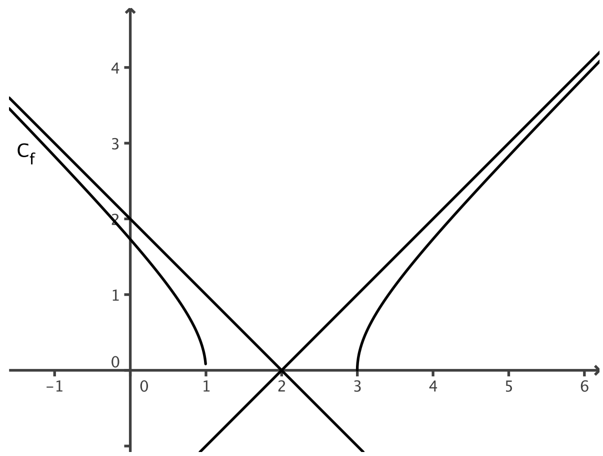
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(x-2)\right) = 0$. Ainsi, la droite d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$.

De même, On a $f(x)-(-x+2) = \sqrt{x^2-4x+3} + x - 2 = \dfrac{x^2-4x+3-(-x+2)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2} = \dfrac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}-x+2}$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-4x+3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x+2)\right) = 0$.

Ainsi, la droite d'équation $y = -x+2$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.




## solution de l'exercice 10

1. L'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}^*$ qui est centré en 0. De plus, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}^*$, $-x$ appartient $\mathbb{R}^*$ et $f(-x) = -x\sin\left(\dfrac{1}{-x}\right) = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$ car la fonction sinus est impaire. Donc la fonction $f$ est paire.

2. On sait que pour tout réel $x$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$; et $-x \leqslant x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant x$.

Comme $\lim\limits_{x\to0}(-x) = \lim\limits_{x\to0} x = 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

3. On admet que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$. En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a $\dfrac{\sin X}{X} = \dfrac{\sin(1/x)}{1/x} = x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} X = 0$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X\to0}\dfrac{\sin X}{X} = 1$.

4. Comme la fonction $f$ est paire et que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

5. La courbe C représentative de la fonction $f$ admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie, et admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

## Exercice 11

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de $f$.
3. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point A d'abscisse $a$ différent de $-1$.

b) Déterminer l'abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses.

c) Soit H le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.

Déterminer l'aire du triangle AHB.

Cette aire dépend-elle de $a$ ?

## Exercice12

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de $f$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
4. Montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0.
6. a) Trouver tous les polynômes du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0.

b) Parmi ces polynômes, en existe-t-il un qui passe par le point A de coordonnées (2; 1) ? Justifier la réponse.

7. Représenter graphiquement à l'aide de Geogebra, la courbe C, la tangente T, la droite (d), le polynôme (s'il existe de la question 6. b).

## Solution de l'exercice 11

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ ; On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1) = -\infty$ ;

On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x+1) = 0^+$ ; On a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}(x+1) = 0^-$ ;

2. Pour étudier les variations de $f$, on détermine la fonction dérivée : cette fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Et $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} < 0$, donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1[$ et sur $]-1\,;+\infty[$.

3. a) Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point A d'abscisse $a$ différent de $-1$ est de la forme $y = f'(a)(x-a) + f(a) = \dfrac{-1}{(a+1)^2}(x-a) + \dfrac{1}{a+1} = \dfrac{-(x-a)+a+1}{(a+1)^2} = \dfrac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$.

b) L''abscisse du point B intersection de T et de l'axe des abscisses vérifie les deux équations

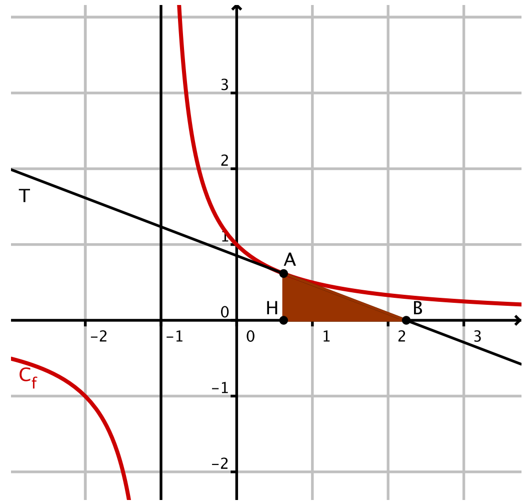
$y = 0$ et $y = \dfrac{-x+2a+1}{(a+1)^2}$ ; soit $-x + 2a + 1 = 0$, d'où $x = 2a + 1$.

Donc B$(2a + 1; 0)$.

c) Si H le projeté orthogonal de A$(a; f(a))$ sur l'axe des abscisses, alors H$(a; 0)$.

Le triangle AHB est rectangle en H, donc l'aire du triangle AHB = $\dfrac{\text{HA}\times\text{HB}}{2} = \dfrac{|f(a)|\times|2a+1-a|}{2} = \dfrac{|1/(a+1)|\times|a+1|}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Cette aire est invariante pour tout réel $a$ de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.




## Solution de l'exercice 12

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ ; on obtient une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, on utilise la quantité conjuguée: on multiplie et on divise $f(x)$ par $\sqrt{x^2+1} + x$ :

on obtient $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour étudier les variations de $f$, on détermine la fonction dérivée : cette fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Et $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$. Le signe de cette dérivée dépend du signe du numérateur : $x - \sqrt{x^2+1}$. Or, pour tout réel $x$, $x^2 < x^2 + 1$, donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2+1}$ puisque la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$. Donc $|x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$, soit $x - \sqrt{x^2+1} < 0$, et la fonction $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | 0 |

4. Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C, ici en $-\infty$, il faut montrer que la limite $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-(-2x)) = 0$.

Or $f(x) + 2x = \sqrt{x^2+1} + x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}$.

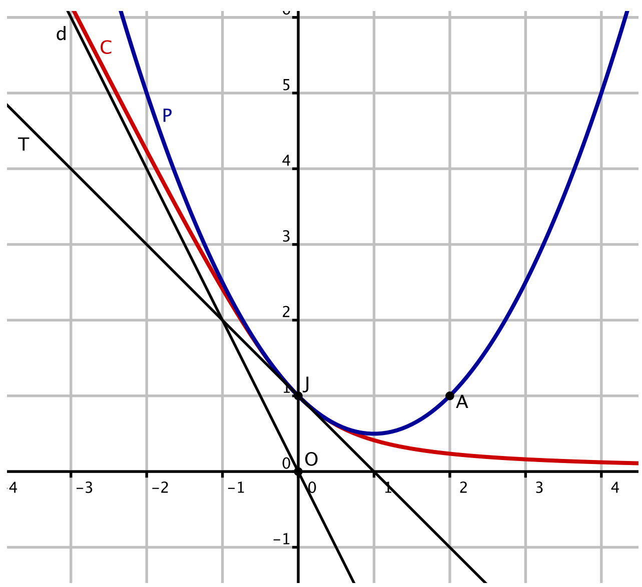
On a vu précédemment que $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$, et la droite (d) d'équation $y = -2x$ est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$.

5.Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -x + 1$.

6. a) Les polynômes P du second degré dont la courbe représentative admet la droite T comme tangente au point d'abscisse 0 vérifient P(0) = $f$(0) = 1 et P '(0) = $f$ '(0) = – 1.
Un polynôme du second degré est de la forme $ax^2 + bx + c$. Donc P(0) = $c$ = 1 et P '($x$) = 2$ax$ + $b$,
soit P '(0) = $b$ = – 1. Donc P($x$) = $ax^2 - x + 1$.

b) Parmi ces polynômes, l'un passe par le point A de coordonnées (2; 1) si P(2) = 1,
soit P($x$) = 4$a$ – 2 + 1 = 4$a$ – 1 = 1, soit $a = \dfrac{1}{2}$ .

7. Représentation graphique de la courbe C, la tangente T, la droite (d), le polynôme de la question 6. b).




## Exercice 13

On considère la fonction $f$ définie sur ℝ \{2} par $f(x) = \dfrac{2x^2-6}{x-2}$ .

1. Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier les variations de la fonction $f$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction $f$.
4. a) Déterminer des réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$ .

b) Montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C.
5. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0.
6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

## Exercice 14

1. On considère la fonction $f$ définie sur ℝ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ .
Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction $f$ .

2. On considère la fonction $f$ définie sur ℝ⁺ \{1} par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ .
Déterminer les limites de la fonction aux bornes de son ensemble de définition.

## *Solution de l'exercice 13*

1. On utilise la propriété : la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-6}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$ .

Et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-6}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$ .

On a $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} (x-2) = 0^+$ , donc $\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \frac{2x^2-6}{x-2} = +\infty$ par quotient de limites.

On a $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} (2x^2-6) = 2$ et $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} (x-2) = 0^-$ , donc $\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} \frac{2x^2-6}{x-2} = -\infty$ par quotient de limites.

2. Pour étudier les variations de la fonction $f$, on détermine la fonction dérivée de $f$ :

$f'(x) = \frac{4x(x-2)-(2x^2-6)\times1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-8x+6}{(x-2)^2}$ .

Le dénominateur est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur: on calcule le discriminant : $\Delta = 8^2 - 4\times2\times6 = 16 > 0$. Il y a deux racines $x_1 = \frac{8-\sqrt{16}}{2\times2} = 1$ et $x_2 = \frac{8+\sqrt{16}}{2\times2} = 3$. Ce numérateur est du signe de $a = 2 > 0$ pour les valeurs extérieures aux racines.

3. Le tableau de variations de la fonction $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $4$ | ↘ $-\infty$ | ‖ | $+\infty$ ↘ | $12$ | ↗ | $+\infty$ |

4. a) On a $ax + b + \frac{c}{x-2} = \frac{(ax+b)(x-2)+c}{x-2} = \frac{ax^2+(b-2a)x-2b+c}{x-2} = \frac{2x^2-6}{x-2}$ . Par identification, on trouve $a = 1$ , $b - 2a = 0$ et $-2b + c = -6$; et on trouve $a = 2$, $b = 4$ et $c = 2$.

Donc, pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $f(x) = 2x + 4 + \frac{2}{x-2}$ .

b) Pour montrer que la droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C en $+\infty$ , on montre que $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(ax+b)) = 0$ : On a $f(x) - (2x + 4) = \frac{2}{x-2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x-2} = 0$, donc $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-(2x+4)) = 0$. On montre de même que la droite est asymptote oblique à la courbe C en $-\infty$ .

5. Une équation de la tangente T à la courbe C représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 0 est donnée par $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{3}{2}x + 3$.

6. Pour déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses, on résout l'équation : $f(x) = 0$, soit $2x^2 - 6 = 0$ équivaut à $2(x^2 - 3) = 0$ équivaut à $x^2 - 3 = 0$ équivaut à $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$ .
Donc les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses sont ( $\sqrt{3}$ ; 0) et ($-\sqrt{3}$ ; 0).

### Solution de l'exercice 14

1. On considère la fonction $f$ définie sur $\boldsymbol{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

Pour montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction $f$ en $+\infty$, on détermine $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x)$. On a $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Or $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1} = +\infty$, et $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}+x) = +\infty$ par somme de limites, et $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-2x) = 0$.

Donc, la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe C représentative de la fonction $f$ en $+\infty$.

De plus, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) = +\infty$, donc la droite d'équation $y = 2x$ n'est pas asymptote à C en $-\infty$.

2. $\lim_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1$ (il suffit de calculer $f(0)$).

Pour tout réel $x$ de $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

Ainsi $\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$, $\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{2}$, et $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = 0$.

## Exercice 15

On considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse $x$.

PARTIE A

Pour tout réel $x$, on note $f(x)$ la distance OM.

1. Expliciter la fonction $f$ et préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la parité de la fonction $f$.
3. Déterminer les limites de la fonction $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
4. Étudier les variations de $f$.
5. Préciser les extremums de la fonction $f$ et en quelles valeurs de $x$ ils sont atteints.
6. Faire la représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction $f$.

PARTIE B

Pour tout réel $x$, on note $g(x)$ le coefficient directeur ( lorsqu'il existe) de la droite (OM).

1. Expliciter la fonction $g$ et préciser son ensemble de définition.
2. Étudier la parité de la fonction $g$.
3. Déterminer les limites de la fonction $g$ aux bornes de son ensemble de définition. Que peut-on en déduire pour la courbe $\Gamma$ représentative de la fonction $g$ ?
4. Étudier les variations de $g$.
5. Dresser le tableau de variations de la fonction $g$.
6. Montrer que la courbe $\Gamma$ admet une asymptote oblique (d), que l'on précisera.
7. Étudier la position relative de $\Gamma$ et de (d).
8. A l'aide d'un logiciel, faire la représentation graphique de $\Gamma$ et des asymptotes.

Facultatif : Existe-t-il des positions de M telles que la distance OM égale le coefficient directeur de (OM) ?

## *Solution de l'exercice 15*

Dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$ , $\vec{j}$ ) du plan, on considère la courbe C d'équation $y = 1 - x^2$ et le point M de la courbe C d'abscisse $x$.

PARTIE A : Pour tout réel $x$, on note $f(x)$ la distance OM.

1. La distance OM = $\sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{x^2 + (1 - x^2)^2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$.
Le polynôme $x^4 - x^2 + 1 = X^2 - X + 1$ a un discriminant égal à $-3 < 0$, donc ne s'annule pas et est toujours du signe de $a = 1$, donc strictement positif. Ainsi, l'ensemble de définition de $f$ est $\mathbb{R}$ .
2. Étude de la parité de la fonction $f$ : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ ,
$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - (-x)^2 + 1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} = f(x)$ ; donc la fonction $f$ est paire.
3. Les limites de la fonction $f$ : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - x^2 + 1 = +\infty$ car la limite d'un polynôme en l'infini est la limite de son terme de plus haut degré. De plus, $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ , donc par la limite de fonctions composées, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
De même, et par la parité, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
4. Les variations de $f$ : la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables ;
et $f'(x) = \dfrac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}} = \dfrac{x(2x^2 - 1)}{\sqrt{x^4 - x^2 + 1}}$ qui est du signe du numérateur; $2x^2 - 1 = 0$ pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ . D'où le tableau de signes de $f'$ et les variations de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ | | 0 | | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | − | | − | 0 | | | + | |
| $2x^2 - 1$ | | + | 0 | − | | − | 0 | + | |
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | 1 | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |

5. Le maximum local de $f$ est 1 atteint en $x = 0$ ; le minimum est $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ atteint en $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ .
6. La représentation graphique de C et la position de M correspondants aux extremums de la fonction $f$ :

PARTIE B :

1. Le coefficient directeur de la droite (OM) est égal à $\dfrac{y_M - y_O}{x_M - x_O} = \dfrac{1 - x^2}{x} = g(x)$ qui est défini sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étude de la parité de la fonction $g$ : l'ensemble de définition est centré en 0, et pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$ ,
$g(-x) = \dfrac{1 - (-x)^2}{-x} = \dfrac{1 - x^2}{-x} = -g(x)$ ; donc la fonction $g$ est impaire.
3. La fonction $g$ est une fonction rationnelle, donc la limite en l'infini est la limite du quotient des termes de plus haut degré : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$ . $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ .
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (1 - x^2) = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$ , donc par quotient de limites, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = +\infty$. Par la parité, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = -\infty$.
On peut déduire que la courbe $\Gamma$ admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.
4. Les variations de $g$ : la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables ;
et $g'(x) = \dfrac{(-2x)(x) - (1 - x^2)}{x^2} = \dfrac{-x^2 - 1}{x^2}$ qui est du signe du numérateur qui est strictement négatif. Donc, la

fonction $g$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]0\,;+\infty[$.

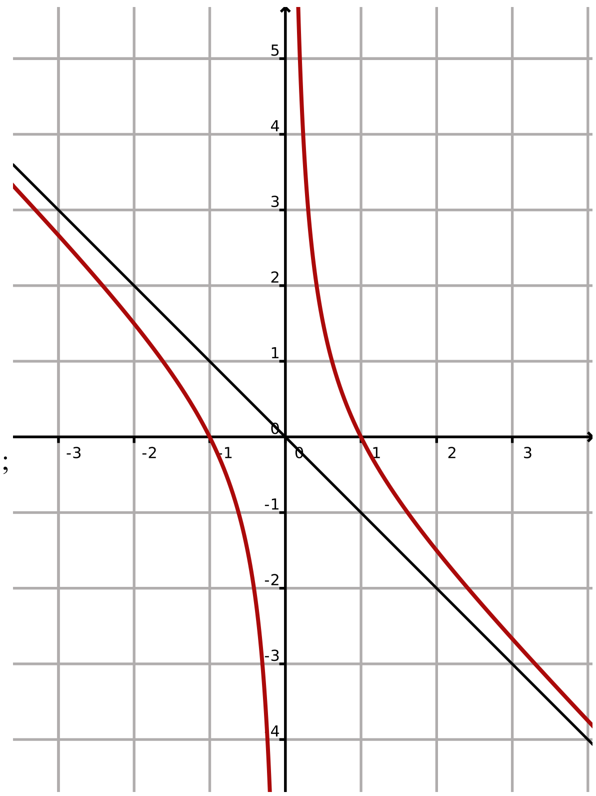
5. Le tableau de variations de la fonction $g$ :

| $x$ | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ |
| $g(x)$ | $+\infty \searrow -\infty$ | $\|\|$ | $+\infty \searrow +\infty$ |

6. Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$, $g(x) = \dfrac{1-x^2}{x} = \dfrac{1}{x} - x$. Et $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(g(x)-x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x} = 0$, donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote oblique à la courbe $\Gamma$.

7. Pour étudier la position relative de $\Gamma$ et de (d) on étudie le signe de la différence $g(x) - (-x) = \dfrac{1}{x}$ qui est strictement positif sur $]0\,;+\infty[$ et strictement négatif sur $]-\infty;0[$. Donc la courbe est au-dessus de la droite (d) sur $]0\,;+\infty[$ et est en-dessous de la droite sur $]-\infty;0[$.

8. La représentation graphique de $\Gamma$ et les asymptotes :




BONUS : Pour trouver les positions de M telles que la distance OM égale le coefficient directeur de (OM), il faut résoudre l'équation $f(x) = g(x)$, soit $\sqrt{x^4-x^2+1} = \dfrac{1-x^2}{x}$ ;

on élève au carré : $x^4 - x^2 + 1 = \dfrac{1-2x^2+x^4}{x^2}$, soit

$x^6 - x^4 + x^2 = 1 - 2x^2 + x^4$, soit $x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1 = 0$.

On considère la fonction $h$ définie par $h(x) = x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 1$.

C'est un polynôme, donc dérivable sur $\mathbb{R}$,

et $h'(x) = 6x^5 - 8x^3 + 6x = 2x(3x^4 - 4x^2 + 3)$.

Le polynôme $3x^4 - 4x^2 + 3 = 3X^2 - 4X + 3$, en posant $X = x^2$ ; le discriminant est égal à $(-4)^2 - 433 = -20 < 0$, donc le polynôme est du signe de $a = 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc la dérivée $h'$ est du signe de $x$, et la fonction $h$ est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $]0\,;+\infty[$. Elle atteint un minimum lorsque $x = 0$, qui vaut $h(0) = -1$ ;

de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^6 = +\infty$ ;

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^6 = +\infty$.

Ainsi, la fonction $h$ s'annule en deux valeurs $x_1 \simeq -0{,}656$ et $x_2 \simeq 0{,}656$.

Donc, il existe deux positions de M telles que la distance OM soit égale au coefficient directeur de (OM).