

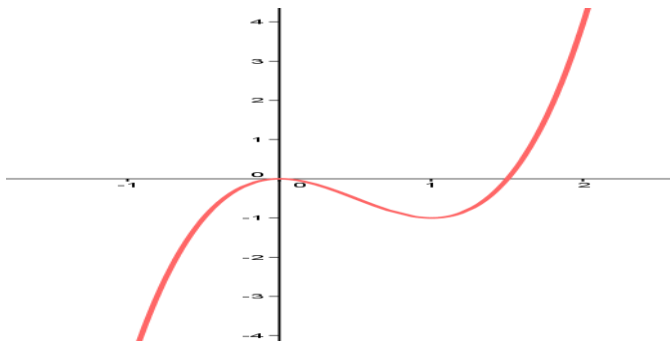
ETUDE DES FONCTIONS

1) CONCAVITE ; CONVEXITE ; POINTS D'INFLEXION

1) **Activité** : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 3x^2$$

- Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction g .
- Dresser le tableau de signe de $g''(x)$.



- La courbe représentative de g est représentée ci-contre

Étudier graphiquement La position relative de la courbe cg par rapport à ses tangentes.

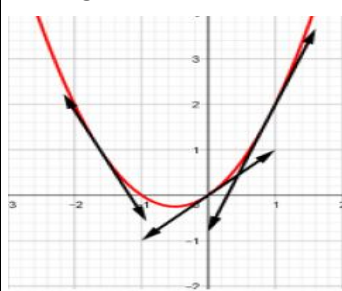
- Que peut-on conclure ?

2) Définition et propriétés.

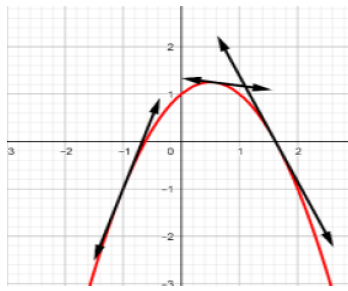
2.1 Définitions :

Définition : Soit f une fonction dont la courbe représentative est C_f .

- On dit que la courbe est convexe si elle se trouve au-dessus de toutes ses tangentes
- On dit que la courbe est concave si elle se trouve au-dessous de toutes ses tangentes.
- Un point d'inflexion est un point où s'opère un changement de concavité de la courbe C_f



Graphique d'une fonction convexe



Graphique d'une fonction concave



Point d'inflexion en A

Remarque : Si f est dérivable en a et C_f traverse sa tangente en A alors le point A est un point d'inflexion

2.2 Dérivée seconde et concavité.

Théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- Si f'' est positive sur I alors C_f est convexe sur I .
- Si f'' est négative sur I alors C_f est concave sur I .
- Si f'' s'annule en a en changeant de signe alors C_f admet un point d'inflexion en $A(a, f(a))$

Remarque : Les conditions du théorème précèdent sont suffisantes ; on peut avoir une courbe convexe, concave ou un point D'inflexion sans l'existence même de la dérivée seconde.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3}$$

- Déterminer les dérivées première et seconde de la fonction f .
- Dresser le tableau de signe de $f''(x)$ et étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent

Solution : 1)

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + x + \frac{2}{3} \right)' = \frac{1}{12}4x^3 - 4x + 1 = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 1 \right)' = x^2 - 4$$

$$2) f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

(C_f) est convexe sur $]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[$

(C_f) est concave sur $[-2, 2]$ et $A(1, f(1))$ et

$B(-1, f(-1))$ sont les points d'inflexions de (C_f)

Exercice1 : Soit la fonction f définie sur $I = [0; \pi]$ par : $f(x) = \sin^2 x$ Étudier la concavité de la courbe de f et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur I

Solution : $\forall x \in [0; \pi]$

$$f'(x) = (\sin^2 x)' = 2(\sin x)' (\sin x)^{2-1} = 2 \cos x \sin x$$

$$f'(x) = \sin 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \cos 2x \quad \forall x \in [0; \pi]$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

Et $k \in \mathbb{Z}$ donc les solutions sont : $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{3\pi}{4}$

$$x \in [0; \pi] \Rightarrow 2x \in [0; 2\pi]$$

$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	
$\cos 2x$	$+$	0	$-$	0	$+$

On a donc :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	
$f''(x)$	+	0	-	0	+

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

(C_f) est concave sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ et $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ et

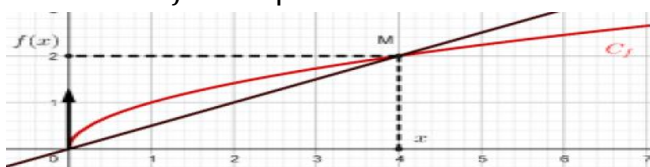
$B\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

II) DEMI-TANGENTE VERTICALE

Introduction : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) f(x) = \sqrt{x}$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

La fonction f n'est pas dérivable à droite de 0.



Soient $x \neq 0$ et $M(x, f(x))$ un point de la courbe C_f la droite (OM) à pour coefficient directeur

$$m = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ donc elle a pour vecteur directeur}$$

$$\vec{u}\left(1; \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ et le vecteur } \vec{v}(\sqrt{x}; 1) \text{ est aussi vecteur}$$

directeur de la droite (OM) si on fait tendre x vers 0 (à droite) La droite (OM) "tend" pour une position limite vers une droite (T) de vecteur directeur $\vec{j}(0;1)$ Donc sera parallèle à l'axe (Oy) .

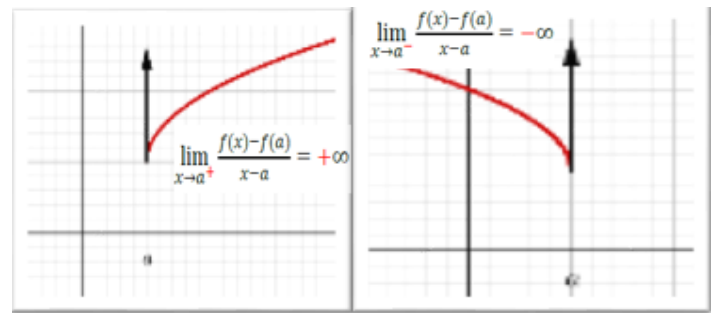
Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, a + r[$

Si f est continue à droite de a et

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$$

Alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale à droite de a .

Interprétation géométriques



Exemple : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 \sqrt{1+x}$$

1. étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = -1$.

2. donner une interprétation géométrique

Solution : $D_f = [-1, +\infty[$

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (\sqrt{1+x})^2}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 (1+x)}{(x+1)\sqrt{1+x}} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = -1$.

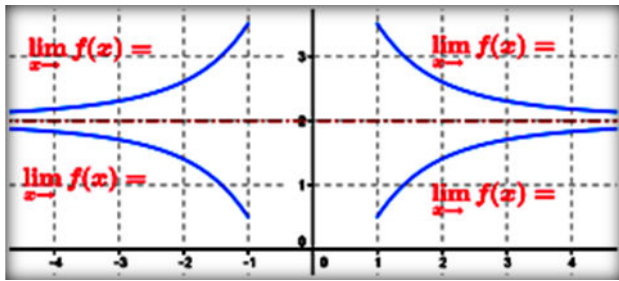
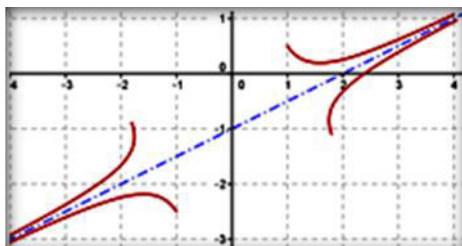
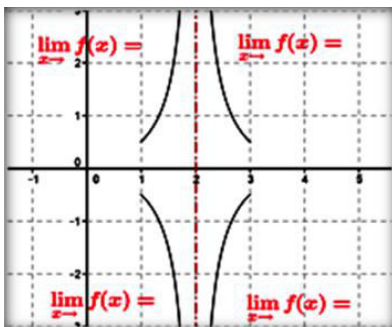
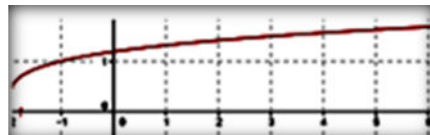
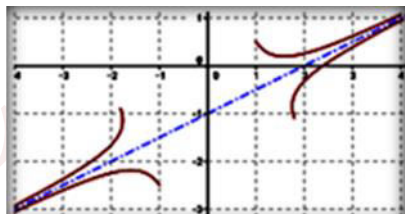
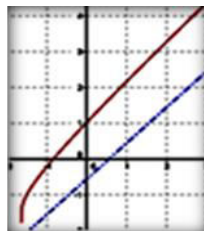
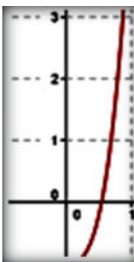
2) Interprétation géométrique :

La courbe C_f admet une demi-tangente verticale à droite du point $A(-1; f(-1))$ dirigée vers le haut

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = +\infty \quad (+ \times + = +)$$

III) BRANCHES INFINIES.

II) BRANCHES INFINIES.

Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$	Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$	Si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$
 La droite (Δ) d'équation $y = b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞	La droite $(\Delta) : y = ax + b$ est une Asymptôte oblique à (C_f) signifie que : $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  (C_f) est au dessus de $(\Delta) \Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) > 0$ (C_f) est en dessous de $(\Delta) \Leftrightarrow (f(x) - (ax + b)) < 0$	 La droite (Δ) d'équation $x = a$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de a
Détermination de la nature de la branche infinie dans le cas : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$		
Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	Si : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$	
	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \infty$
 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Ox)	 La droite (Δ) d'équation $y = ax + b$ est une Asymptôte à (C_f) au voisinage de ∞.	 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction la droite (D), d'équation $y = ax$
		 La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction (Oy)

Exemples :

Exemple1 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2x-1}{3x-6}$$

déterminer les limites aux bornes de D_f et (Donner une interprétation géométrique des résultats)

Solution : $D_f = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-1 = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x-6 = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{3x-6} = 0^+$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

Donc : $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ) : $x = 2$ est une asymptote vertical a la courbe C_f

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{3x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

Interprétation géométrique des résultats :

La droite (Δ) : $y = \frac{2}{3}$ est une asymptote

horizontal a la courbe C_f

Exemple2 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

$$\text{On a : } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x} = \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$$

($|x| = x$ car $x \rightarrow +\infty$)

La droite (Δ) : $y = 1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1$$

La droite (Δ') : $y = -1$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exemple3 : Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = 2 + \frac{x-1}{x^2}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ car :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc : La droite (Δ) : $y = 2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de ∞
étudions la position de courbe (C_f) et la droite (Δ) ?

$$f(x) - 2 = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{le signe et celui de } x-1$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(x)-2$	$-$	$-$	0	$+$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ) : $y = 2$

Sur l'intervalle $]-\infty; 0[\cup]0; 1[$ et la courbe C_f est

au-dessus de (Δ) : $y = 2$ Sur l'intervalle $]1; +\infty[$

C_f coupe (Δ) au point $I(1; 2)$

Exemple4: Soit f la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* - \{3\} : f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$$

montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

$$\text{Solution } f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x-3} \Leftrightarrow f(x) - (2x-1) = \frac{1}{x-3}$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Donc : la droite (Δ) : $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (2x-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-3} = 0$$

Donc : la droite (Δ) : $y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

Exemple5 : Soit la fonction définie par :

$f(x) = \sqrt{x}$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Ox) au voisinage de $+\infty$

Exemple6 : Soit la fonction définie par :

$f(x) = x^3$ étudier les branches paraboliques au voisinage de $+\infty$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$

Exemple7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

Solution : On a : $Df = \mathbb{R}^+$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\text{Mais } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

Donc la courbe de la fonction admet une branche parabolique vers la droite $(\Delta): y = x$.

Propriété : Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La droite $(\Delta): y = ax + b$ ($a \neq 0$) est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ si et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad (a \neq 0) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

Preuve : D'après la propriété précédente : On peut écrire $f(x) = ax + b + h(x)$ où $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + b + h(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{h(x)}{x} = a$$

$$\text{D'autre part : } f(x) - ax = b + h(x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - ax = b$$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

1) Déterminer D_f

2) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution :1) On a : $x^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc $D_f = \mathbb{R}$

$$2)a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = x \text{ car } x \rightarrow +\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1 = a$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$$

Donc : la droite $(\Delta): y = 1x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

b) De même on a :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \quad |x| = -x \text{ car } x \rightarrow -\infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -1 = a$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 1x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + x)(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = 0$$

Donc : la droite $(\Delta): y = -x$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

IV) LES ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE.

1) Axe de symétrie :

Activité : Soit la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt{2x^2 - 4x - 6}$$

1. Déterminer D_f ensemble de définition de la fonction f .

2. Montrer que $(\forall x \in D_f) (2 - x \in D_f)$

3. Montrer que $(\forall x \in D_f) (f(2 - x) = f(x))$

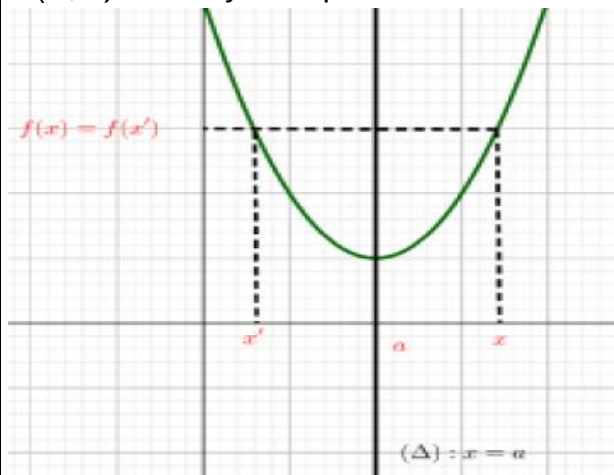
Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f .

La droite $(\Delta): x = a$ est un axe de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

a) $(\forall x \in D_f) (2a - x \in D_f)$

b) $(\forall x \in D_f) (f(2a - x) = f(x))$

Preuve : Soit x un élément de D_f et $A(x, 0)$, si $A'(x', 0)$ est le symétrique



de A par rapport à $(\Delta) x = a$ alors

$$\frac{x + x'}{2} = a \quad (a \text{ est le centre de l'intervalle de bornes } x \text{ et } x')$$

d'où : $x' = 2a - x$ et puisque $(\Delta) \perp (AA')$ alors

$f(x) = f(x')$ ce que signifie : $f(2a - x) = f(x)$

Exemple : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x - x^2}$$

1) Déterminer D_f

2) montrer que la La droite $(\Delta): x = \frac{1}{2}$ est un axe

de symétrie de la courbe C_f

Solution : 1) On a : $f(x) = \sqrt{x - x^2}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - x^2 \geq 0\}$$

$$x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$x-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{donc : } D_f = [0, 1]$$

2)a) montrons que : si $x \in D_f = [0, 1]$ alors

$$1 - x \in D_f ?$$

$$x \in D_f = [0, 1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \Rightarrow 1 - 1 \leq 1 - x \leq 1$$

$$\text{Donc : } x \in D_f \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 1 \Rightarrow 1 - x \in D_f$$

b) montrons que : $f(1 - x) = f(x)$?

$$\begin{aligned} f(1 - x) &= \sqrt{(1 - x) - (1 - x)^2} = \sqrt{1 - x - (1 - 2x + x^2)} \\ &= \sqrt{1 - x - 1 + 2x - x^2} = \sqrt{x - x^2} = f(x) \end{aligned}$$

Donc : La droite $(\Delta): x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice2 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

montrer que la La droite $(\Delta): x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$

a) si $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $\frac{2}{3} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{2}{3} - x\right) = f(x)$?

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3} - x\right) &= 3\left(\frac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3} - x\right) + 5 \\ &= 3x^2 - 2x + 5 = f(x) \end{aligned}$$

Donc : La droite $(\Delta): x = \frac{1}{3}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice3 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

montrer que la La droite $(\Delta): x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

a) si $x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$ alors $4 - x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}$ en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \Rightarrow x \neq 1 \text{ et } x \neq 3$$

$\Rightarrow -x \neq -1$ et $-x \neq -3 \Rightarrow 4-x \neq 4-1$ et $4-x \neq 4-3$
 $\Rightarrow 4-x \neq 3$ et $4-x \neq 1$ alors $4-x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$

b) montrons que : $f(4-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$???

$$f(4-x) = \frac{1}{4-x-1} - \frac{1}{4-x-3} = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3}$$

donc $f(4-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 3\}$

donc la droite (Δ) : $x = 2$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Exercice4: Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \cos x$$

montrer que la La droite (Δ) : $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

Solution : On a : $D_f = \mathbb{R}$

a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2k\pi - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f(2k\pi - x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$???

$$f(2k\pi - x) = \cos(2k\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$

donc $f(2k\pi - x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc la droite (Δ) : $x = k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f

2) Centre de symétrie.

Propriété : Soit f une fonction numérique dont l'ensemble de définition est D_f .

Le point $\Omega(a, b)$ est un centre de symétrie de la courbe C_f si et seulement si :

a) $(\forall x \in D_f)(2a - x \in D_f)$

b) $(\forall x \in D_f)(f(2a - x) = 2b - f(x))$

Preuve : $\Omega(a, b)$ étant centre de symétrie de la courbe C_f , si $M(x, f(x))$ est un point de C_f alors sont symétrique M' par rapport à Ω est un point

de C_f . soit $M'(x', f'(x'))$ on a : $\frac{x+x'}{2} = a$

$$\text{et } \frac{f(x) + f(x')}{2} = 2b$$

car a est le centre de l'intervalles de bornes

x et x' et b est le centre de L'intervalles de bornes

$f(x)$ et $f(x')$ Par suite : $x' = 2a - x$ et $f(x') = 2b - f(x)$

et finalement : $f(2a - x) = 2b - f(x)$

Exemple: Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x+1}$$

1) montrer que : $\forall x \in D_f : f(x) = x - 2 + \frac{2}{x+1}$

2)montrer que le point $\Omega(-1; -3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution : 1) On a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$x - 2 + \frac{2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)+2}{x+1} = \frac{x^2 - x}{x+1} = f(x)$$

2)a) montrons que si $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ alors

$-2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{-1\} \Leftrightarrow x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2 - x \neq -2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -2 - x \neq -1 \Leftrightarrow -2 - x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

b) montrons que : $f(-2-x) + f(x) = -6 = 2b$??

$$\begin{aligned} f(-2-x) + f(x) &= -2-x-2 + \frac{2}{-2-x+1} + x-2 + \frac{2}{x+1} \\ &= -6 + \frac{2}{-x-1} + \frac{2}{x+1} = -6 - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x+1} = -6 \end{aligned}$$

donc $f(-2-x) + f(x) = -6 = 2b \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

donc le point $\Omega(-1; -3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice5 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sin x - \cos x$$

montrer que le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Solution :

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} - x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x)$??

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x - \sin x$$

$$\text{donc } f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2 \times 0 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc le point $\Omega\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$ est un centre de symétrie de (C_f)

Exercice6 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

1)Déterminer D_f

2) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$

3) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4) montrer que la courbe C_f que la fonction f admet une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ que l'on déterminera

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 4x^2 + 2x - 2 \geq 0\}$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-4}{4} = -1$$

x	$-\infty$	-1	$1/2$	$+\infty$
$4x^2+2x-2$	$+$	0	$-$	$+$

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

$$4x^2 + 2x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

Donc :

$$f'(x) = \left(\sqrt{4x^2 + 2x - 2}\right)' = \frac{(4x^2 + 2x - 2)'}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} = \frac{8x + 2}{2\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{4x + 1}{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}} \quad \forall x \in]-\infty; -1[\cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

3) calculons : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 + 2x - 2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^2 = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 2x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{2x}{x^2} - \frac{2}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} \quad x \rightarrow -\infty \text{ donc } |x| = -x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} = -\sqrt{4} = -2 = a$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} + 2x)(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 2x - 2} - 2x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 2x - 2 - 4x^2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2}{-x \sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{2}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{2}{x}}{-\left(\sqrt{4 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}} + 2\right)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} = b$$

Donc : donc la droite $y = -2x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$ a la courbe C_f

Exercice7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 3$$

- 1) Déterminer les limites de f aux bornes de D_f
- 2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 3) dresser le tableaux de variation de f
- 4) Étudier la concavité de la courbe de (C_f) et déterminer les points d'inflexions s'ils existent sur $\mathbb{R}$
- 5) montrer que le point $I(0;3)$ est un centre de symétrie de (C_f) et déterminer l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $I(0;3)$
- 6) on utilisant le tableaux de variation de f montrer que l'équation : $f(x) = 0$ admet une solution unique α tel que : $\alpha < -1$ et vérifier que $-2.2 < \alpha < -2.1$ et déterminer le signe de $f(x)$
- 7) Tracer la courbe C_f et discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation : $x^3 - 3x + 3 = m$

Solution : 1) On a : $D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ car f est une fonction polynôme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 - 3x + 3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f) :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 3x + 3}{x} = x^2 - 3 + \frac{3}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 + \frac{3}{x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 3 + \frac{3}{x} = +\infty$$

Donc la courbe C_f admet une branche parabolique vers l'axe (Oy) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

3) le tableaux de variation de f ?

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 3)' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x+1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

4) Étude de la concavité de la courbe de (C_f) ?

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = 3(x^2 - 1) \text{ donc } f''(x) = 6x$$

le tableaux de signe de $f''(x)$ est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

Donc : (C_f) est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

(C_f) est concave sur $\mathbb{R}_-^*$ et $f''(x)$ s'annule en changeant de signe 0 donc $I(0,3)$ est un point d'inflexion de (C_f)

5) montrons que le point $I(0,3)$ est un centre de symétrie de (C_f) ?

a) on a si $x \in \mathbb{R}$ alors $2 \times 0 - x = -x \in \mathbb{R}$

b) montrons que : $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$?

$$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) + 3 = -x^3 + 3x + 3$$

$$2 \times 3 - f(x) = 6 - f(x) = 6 - (x^3 - 3x + 3) = -x^3 + 3x + 3$$

donc $f(-x) = 2 \times 3 - f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc le

point $I(0,3)$ est un centre de symétrie de (C_f)

l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en

$$I(0,3) \text{ est : } (T): y = f'(0)x + f(0) = -3x + 3$$

6) du tableaux de variation de f

On deduit que f admet une valeur minimal en 1 sur l'intervalle $[-1; +\infty[$ et c'est : $f(1) = 1$

$$\text{Donc : } f(x) \geq f(1) = 1 \quad \forall x \in [-1; +\infty[$$

Et l'image de l'intervalle $]-\infty; -1]$ par f est

l'intervalle $]-\infty; 5]$ et $0 \in]-\infty; 5]$ donc il existe un

α de $]-\infty; -1]$ tel que $f(\alpha) = 0$ et puisque f est

strictement croissante sur $]-\infty; -1]$ alors quelque

soit $x \neq \alpha$ on a $x < \alpha$ ou $\alpha < x < -1$ donc

$$f(x) < f(\alpha) \text{ ou } f(\alpha) < f(x) < f(-1)$$

$$\text{Donc : } f(x) < 0 \text{ ou } 0 < f(x) \leq 5$$

Donc : $\forall x \in]-\infty; -1] - \{\alpha\}$ on a $f(x) \neq 0$ donc α

est unique et on utilisant la calculatrice en vérifie

$$\text{que : } f(-2.2) \approx -1.04 \text{ et } f(-2.1) \approx 0.03$$

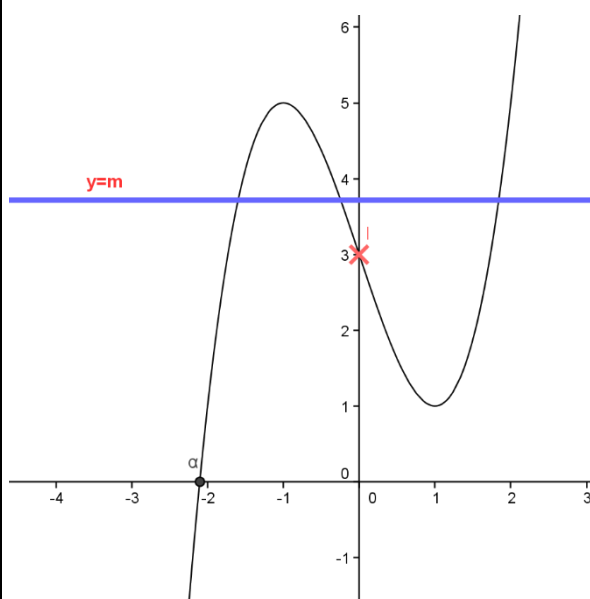
Donc d'après l'étude précédent on a alors :

$$-2.2 < \alpha < -2.1$$

On deduit que : $f(x) > 0 \quad \forall x \in]\alpha; +\infty]$ et

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in]-\infty; \alpha]$$

7) Tracer la courbe C_f



Remarque : le signe de $f(x)$ partir de (C_f) ?

a) sur $]-\infty; \alpha]$ $f(x) \leq 0$ car (C_f) est au-dessous de l'axe des abscisses

b) sur $]\alpha; +\infty]$ $f(x) \geq 0$ car (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses

$$7) x^3 - 3x + 3 = m \Leftrightarrow f(x) = m$$

Les solutions de l'équation : $f(x) = m$ sont les

abscisses des points d'intersections de (C_f)

avec la droite d'équation : $y = m$

m	$m \in]5; +\infty[\cup]-\infty; 1[$	$m = 1 \text{ ou } m = 5$	$m \in]1; 5[$
nombre de solutions	1	2	3

Exercice8 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$$

- 1) déterminer D_f ensemble de définition de f
- 2) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 3) étudier la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal
- 4) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f
- 5) déterminer les points d'intersections de (C_f) avec l'axe des abscisses f
- 6) montrer que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f)
- 7) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 0$ et $x \neq 1$

donc : $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$

2) étude des branches infinies de la courbe (C_f)

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 2$$

$$\text{Car : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

La droite (Δ) : $y = 2$ est une asymptote horizontal a la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

$$b) \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 - \frac{1}{x-1} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite (Δ') : $x = 0$ est une asymptote a la courbe C_f

$$c) \text{ on a } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{x-1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{x-1} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1} 2 + \frac{1}{x} = 3$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

donc La droite (Δ'') : $x = 1$ est une asymptote a la courbe C_f

3) étude de la position de courbe (C_f) avec son asymptote horizontal : $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) - 2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{-1}{x(x-1)}$$

$$\text{si } x \in]0; 1[\text{ alors } f(x) - 2 > 0$$

Donc la courbe C_f est au-dessus de (Δ) : $y = 2$

$$\text{si } x \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[\text{ alors } f(x) - 2 < 0$$

Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ) : $y = 2$

5) déterminons les points d'intersections de (C_f)

avec l'axe des abscisses : $(\forall x \in D_f)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x(x-1)} = 0$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

Donc les points d'intersections de (C_f) avec

l'axe des abscisses sont : $A\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ et $B\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

6) montrons que la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est un

axe de symétrie de (C_f) :

$$\text{On a : } D_f =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$$

a) si $x \in D_f$ alors $1-x \in D_f$ en effet :

$$x \in \mathbb{R} - \{0; 1\} \Rightarrow x \neq 0 \text{ et } x \neq 1$$

$$\Rightarrow -x \neq 0 \text{ et } -x \neq -1 \Rightarrow 1-x \neq 1 \text{ et } 1-x \neq 0$$

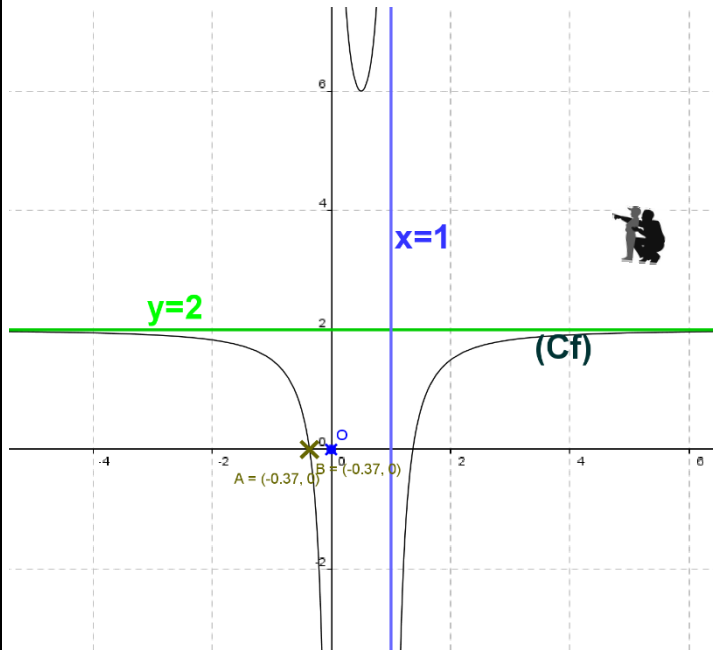
$$\text{alors } 1-x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

b) montrons que : $f(1-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$???

$$f(1-x) = 2 + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x-1} = 2 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} = 2 - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$$

$$\text{donc } f(1-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$$

donc la droite $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de la courbe C_f



Exercice9 : soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

1) déterminer les limites aux bornes de D_f

2) déterminer les réels a et b tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 3} \quad \forall x \in D_f$$

3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

4) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f

5) montrer que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) calculer $f''(x) \quad \forall x \in D_f$ et étudier la concavité de la courbe de f

7) étudier la position de courbe (C_f) et son asymptote oblique (Δ)

8) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

9) déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) en $x_0 = 2$

9) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 3$

donc : $D_f = \mathbb{R} - \{3\} =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{0}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{0}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

2) on fait la division euclidienne de $x^2 - 3x + 6$ par $x - 3$ on trouve : $x^2 - 2x + 1 = (x - 3)(x + 1) + 4$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 1) + 4}{x - 3} = x + 1 + \frac{4}{x - 3}$$

Donc : $a = 1$ et $b = 1$ et $c = 4$

3) Les branches infinies de la courbe (C_f)

$$a) \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

donc La droite $x = 3$ est une asymptote à la courbe C_f

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{on a : } f(x) = x + 1 + \frac{4}{x - 3} \Leftrightarrow f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x - 3}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{+\infty} = 0$$

Donc : la droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x - 3} = \frac{4}{-\infty} = 0$$

Donc : la droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) les variations de f et le tableau de variation ?

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{3\} : f'(x) = \left(x + 1 + \frac{4}{x - 3} \right)' = 1 - \frac{4}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3)^2 - 4}{(x - 3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x - 3)^2 - 2^2}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 3 - 2)(x - 3 + 2)}{(x - 3)^2} = \frac{(x - 5)(x - 1)}{(x - 3)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $(x - 5)(x - 1)$

$$(x - 5)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ ou } x = 1$$

Le tableau de signe :

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+

Le tableau de variation

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ 8 $\nearrow$	$+\infty$

5) Montrons que le point $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f) ??

a) Montrons que si $x \in \mathbb{R} - \{3\}$ alors $6-x \in \mathbb{R} - \{3\}$?
 $x \in \mathbb{R} - \{3\} \Leftrightarrow x \neq 3 \Leftrightarrow -x \neq -3 \Leftrightarrow 6-x \neq 3 \Leftrightarrow 6-x \in \mathbb{R} - \{3\}$

b) Montrons que : $f(6-x) + f(x) = 8 = 2b$?
 $f(6-x) + f(x) = 6-x+1 + \frac{1}{6-x-3} + x+1 + \frac{1}{x-3}$
 $= 8 + \frac{1}{-x+3} + \frac{1}{x-3} = 8 - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-3} = 8$

Donc : $\Omega(3;4)$ est un centre de symétrie de (C_f)

6) étudie la concavité de la courbe de f ?
 $\forall x \in D_f : f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-3)^2}$

Donc : $f''(x) = \frac{2(x-3)4}{(x-3)^4} = \frac{8(x-3)}{(x-3)^4}$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $x-3$

Si $x > 3$ (C_f) est convexe
 Si $x < 3$ (C_f) est concave

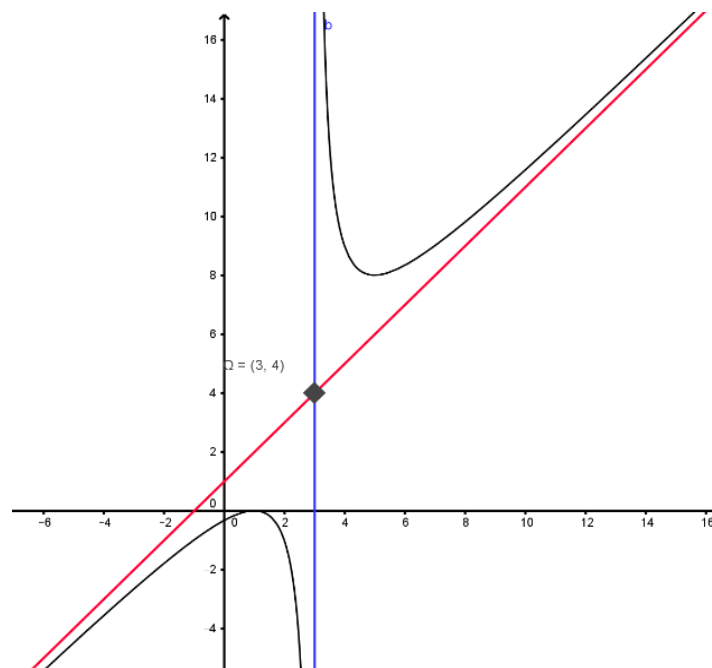
7) $f(x) - (x+1) = \frac{4}{x-3}$
 Si $x > 3$ alors $f(x) - (x+1) > 0$
 Donc la courbe C_f est au-dessus de (Δ)
 Si $x < 3$ alors $f(x) - (x+1) < 0$
 Donc la courbe C_f est au-dessous de (Δ)

8) a) intersections avec l'axe des abscisses
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x-3} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{3\} :$
 $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 1 \times 1 = 0$
 $x = \frac{-b}{2a} = 1$ donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses est $A(1;0)$

a) intersections avec l'axe des ordonnées
 $f(0) = -\frac{1}{3}$ donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est $C(0; -\frac{1}{3})$

9) l'équation de la tangente (T) a la courbe (C_f) en $x_0 = 2$ est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
 $f'(2) = \frac{(2-5)(2-1)}{(2-3)^2} = \frac{-3}{1} = -3$ et $f(2) = \frac{2^2 - 2 \times 2 + 1}{2-3} = -1$
 $y = f(2) + f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y = -1 - 3(x-2) \Leftrightarrow y = -3x + 5$

9) La courbe (C_f) :



Exercice 10: Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$$

- 1) Déterminer D_f
- 2) Déterminer les limites aux bornes de D_f
- 3) étudier les branches infinies de la courbe (C_f)
- 4) étudier la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1
- 5) étudier les variations de f et dresser le tableaux de variation de f
- 6) tracer la courbe (C_f)

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - x - 2 \geq 0\}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9 = (3)^2 > 0$$

$$x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 2$$

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
x^2-x-2	+	0	-	0	+

$$\text{Donc : } D_f =]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$$

$$2) \text{ on a : } \forall x \in D_f - \{0\}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} = |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$\text{Et puisque : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

3) étude des branches infinies de la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} + 1} = -\frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x - 2} + x)(\sqrt{x^2 - x - 2} - x)}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}} - 1} = \frac{1}{2}$$

Donc : la droite $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$

4) étude de la dérivabilité de f adroite de 2 et à gauche de -1

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 2 et à gauche de -1

Alors la courbe C_f admet une demi-tangente verticale aux points $A(-1, 0)$ et $B(2, 0)$

5) étude des variations de f et le tableaux de variation de f ?

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow \forall x \in]-\infty; -1[\cup]2; +\infty[$$

Donc :

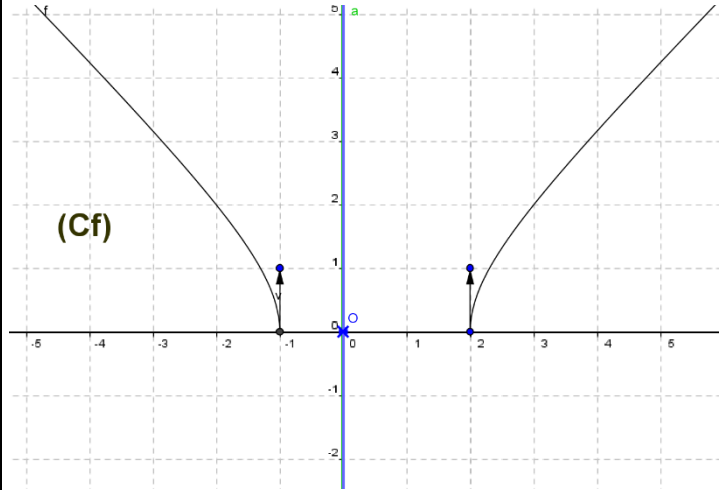
$$f'(x) = (\sqrt{x^2 - x - 2})' = \frac{(x^2 - x - 2)'}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$$

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \quad \forall x \in]-\infty; -1[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2x - 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
$f(x)$	$+\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow 0$	$+\infty$

6) tracer la courbe (C_f)



Exercice11: soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- déterminer D_f ensemble de définition de f
- montrer que f est périodique de période $T = \pi$ et en déduire le domaine d'étude de f
- déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f
- tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$

Solution :

$$1) D_f = \mathbb{R}$$

$$2) a) \text{ si } x \in \mathbb{R} \text{ alors } \pi + x \in \mathbb{R}$$

b)

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2(\pi + x) + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f(\pi + x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = \pi$

Remarque : la fonction : $x \rightarrow \cos(ax + b)$ est

périodique de période $T = \frac{2\pi}{|a|}$ si $a \neq 0$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = \pi$

donc par exemple : $D_E = [0; \pi]$

3) $f'(x)$ et le tableaux de variation de f ?

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 2 \times -2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; \pi]$

$$x \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4}$$

On utilisant le cercle trigo en déduit le signe de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

Le tableau de signe de $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ est :

$2x+\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	π	2π	$\frac{9\pi}{4}$	
$\sin(2x+\frac{\pi}{4})$	+	0	-	0	+

le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
$f(x)$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$

4) du tableau de variation de f : on déduit que f change de signe en sur les intervalles $\left[0; \frac{3\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$ cad (C_f) coupe l'axe des abscisses

On va résoudre dans $I = \left[0; \frac{7\pi}{8}\right]$ l'équation :

$$f(x) = 0$$

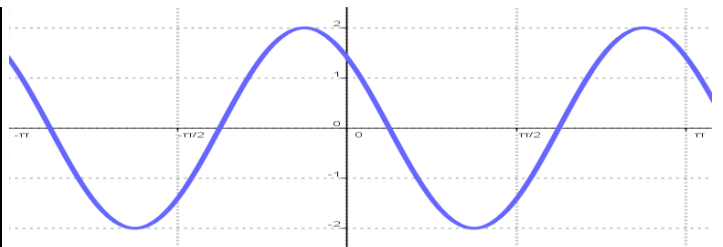
$$\text{On a : } \begin{cases} f(x) = 0 \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ \frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{9\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \\ x \in I \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{8}$$

On trace la courbe (C_f) sur l'intervalle

$$D_E = [0; \pi]$$

Et on déduit le reste par les translations de vecteurs $k\pi\vec{i}$ $k \in \mathbb{Z}$



Exercice12: soit f une fonction définie par :

$$f(x) = 4\sin x + \cos 2x$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer que f est périodique de période $T = 2\pi$ et en déduire le domaine d'étude de f

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableaux de variation de f

4) donner l'équation de la tangente (T) à la courbe de f en $x_0 = 0$

5) calculer $f''(x)$ en fonction de $\sin x$

6) déterminer les points d'inflexions de la courbe (C_f)

7) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$

2) a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$b) f(2\pi + x) = 4\sin(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi))$$

$$f(2\pi + x) = 4\sin x + \cos(2x) = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

Un domaine d'étude de f

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur $T = 2\pi$

donc par exemple : $D_E = [0; 2\pi]$

f est dérivable sur $D_E = [0; 2\pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x) = 4\cos x - 4\cos x \sin x$$

$$f'(x) = 4\cos x(1 - \sin x)$$

Etude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; 2\pi]$

On a : $1 - \sin x \geq 0$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - \sin x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \text{ ou } 1 - \sin x = 0$$

$$1 - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ Donc :}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	1

4) l'équation de la tangente (T) à la courbe de f en $x_0 = 0$ est : $y = f(0) + f'(0)(x-0)$

Avec : $f'(0) = 4$ et $f(0) = 1$ donc : $y = 4x + 1$

5) calcul de $f''(x)$ en fonction de $\sin x$:

On a $f'(x) = 4\cos x - 2\sin(2x)$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = -4\sin x - 4\cos(2x) = -4\sin x - 4(1 - 2\sin^2 x)$$

$$f''(x) = 8\sin^2 x - 4\sin x - 4 = 4(\sin^2 x - \sin x - 1)$$

Etude du signe de $f''(x)$ sur $D_E = [0; 2\pi]$

On pose : $X = \sin x$ donc : $X \in [-1; 1]$ et l'équation

$$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \text{ devient : } X^2 - X - 1 = 0$$

$$\Delta = 9 \text{ les solutions sont : } X_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = 1$$

$$\text{Donc : } f''(x) = 8(\sin x - 1)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)$$

On a : $\sin x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En utilisant le cercle trigo on déduit que :

$$\sin x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$$

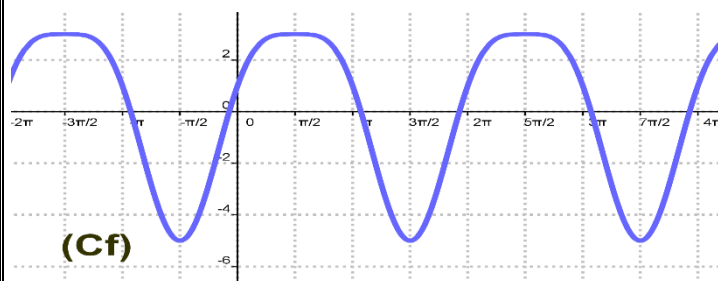
x	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$f''(x)$	—	0	+	0	—

Donc : (C_f) est convexe sur $\left[\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right]$

(C_f) est concave sur $\left[0, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$ et $A\left(\frac{7\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$

et $B\left(\frac{11\pi}{6}, -\frac{3}{2}\right)$ sont les points d'inflexions de (C_f)

7) La courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$



Exercice 13: soit f une fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

1) déterminer D_f ensemble de définition de f

2) montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0; \pi]$

3) déterminer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

4) tracer la courbe (C_f) sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$

Solution : 1) $D_f = \mathbb{R}$ car $2 + \cos x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Un domaine d'étude de f

a) si $x \in \mathbb{R}$ alors $2\pi + x \in \mathbb{R}$

$$f(2\pi + x) = \frac{\sin(2\pi + x)}{2 + \cos(2\pi + x)} = \frac{\sin x}{2 + \cos x} = f(x)$$

Donc : f est périodique de période $T = 2\pi$

il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur

$T = 2\pi$ donc par exemple : $D = [-\pi; \pi]$

Étudions la parité de f ?

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{2 + \cos(-x)} = -\frac{\sin x}{2 + \cos x} = -f(x)$$

Donc f est impair

Donc il suffit d'étudier f sur $D_E = [0; \pi]$

3) f est dérivable sur $D_E = [0; \pi]$ et $\forall x \in D_E$

on a :

$$f'(x) = \frac{\cos x (2 + \cos x) + \sin x \times \sin x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{2\cos x + 1}{(2 + \cos x)^2}$$

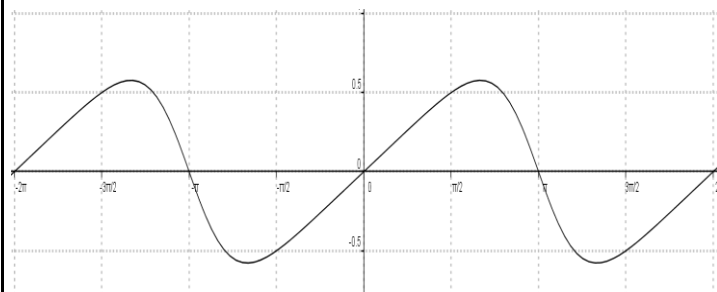
Étude du signe de $f'(x)$ sur $D_E = [0; \pi]$

Le signe de $f'(x)$ est celui de : $2\cos x + 1$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq -\frac{1}{2} \quad \text{Et } x \in [0; \pi] \text{ Donc :}$$

$$2\cos x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$$

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

**C'est en s'entraînant régulièrement aux
calculs et exercices**

Que l'on devient un mathématicien

