TD : LA DERIVATION : **Exercices d'applications et de réflexion avec solutions**

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

http:// xriadiat.e-monsite.com

TD :LA DERIVATION

Exercice1 : On considère la fonction f dénie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x-3$. Justifier que f est dérivable en -2 et préciser $f'(-2)$

Solution :

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-3+1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x-2}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}=\lim_{x\to-2}x-1=-3=f'(-2)$$

Donc f est dérivable en en -2 et $f'(-2)=-3$

Exercice2 : Calculer le nombre dérivé de $f(x)=x^3+x$ en a = 1 en utilisant la deuxième formulation de la dérivation

Solution : $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^3+1+h-2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+3h+1+1+h-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3+3h^2+4h}{h}=\lim_{h\to0}h^2+3h+4=4=f'(1)$$

Exercice3 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x;x\prec0 \\ f(x)=-2x^2+3x;x\geq0 \end{cases}$$

Montrer que $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=3$ et que $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$

Que peut-on conclure ?

Solution :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-2x^2+3x}{x}=\lim_{x\to0^+}-2x+3=3=f'_d(0)$$

3 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à droite de 0

On dit que f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{3x^2+x}{x}=\lim_{x\to0^-}3x+1=1=f'_g(0)$$

1 s'appelle le nombre dérivé de la fonction f à gauche de 0

On dit que f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice4 : soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}\ldots x\geq1 \\ f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}\ldots x\prec1 \end{cases}$$

étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$

Solution : on a $f(1)=\sqrt{1}=1$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}==\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x})^2-1^2}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}=f'_d(1)$$

Donc f est dérivable à droite en 1

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{4}-1}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{4}(x+1)=\frac{1}{2}=f'_g(1)$$

Donc f est dérivable à gauche en 1

et on a : $f'_d(1)=f'_g(1)$

Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=\frac{1}{2}$

Exercice5 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=x^2-|x|$

étudier la dérivabilité de f en $x_0=0$

Solution :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2-x}{x}=\lim_{x\to0^+}x-1=-1=f'_d(0)$$

donc f est dérivable à droite en 0

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+x}{x}=\lim_{x\to0^-}x+1=1=f'_g(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en 0

Mais on a : $f'_d(0)\neq f'_g(0)$

Donc : f n'est pas dérivable en 0.

Exercice6 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=3x^2+x;x\prec0 \\ f(x)=-2x^2+3x;x\geq0 \end{cases}$$

1- Montrer que f est dérivable en $a=-2$.
2- f est–elle dérivable en 0.

Exercice7 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=\left|x^2-2x-3\right|+2x$

1- Ecrire une expression de f sur $\mathbb{R}$ sans valeur absolu.
2- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de -1.
3- f est-elle dérivable en -1.

Exercice8 Déterminer une fonction affine tangente en -3 de la fonction $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Exercice9 : donner une approximation de $sin3$

Solution : Si on veut une approximation de $sin3$, on peut prendre : $f(x) = sinx$ et $a = \pi$ (car π est l'élément le plus proche de 3 dont le sinus est connu) $h = 3 - \pi$ (pour avoir : $3 = \pi + h$)
On a alors $f(a) = sin\pi = 0$ et $f'(a) = cos\pi = -1$ (à prouver) ce qui donne :
$sin3 = sin(\pi + h) \sim -1 \times (3 - \pi) = \pi - 3$.

Exercice10 : soit f une fonction définie sur $]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{\tan\dfrac{x}{2}} \dots si.x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1)étudier la dérivabilité de f en 0
2)Donner une valeur approchée du nombre : $f\left(10^{-5}\right)$

Solution : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\tan\dfrac{x}{2}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan\dfrac{x}{2}}$

$=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}}=2\times 1=2$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=2$
2)on a $f(a + h)\sim f'(a)h + f(a)$
Donc $f\left(0+10^{-5}\right)\sim f(0)+10^{-5}f'(0)$ $a=0$ et $h=10^{-5}$
$f(0)=0$ et $f'(0)=2$
Donc $f\left(10^{-5}\right)\sim 210^{-5}$

Exercice11 : Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de la fonction $f(x)=\sin x$ en $A(0,\ f(0))$

Solution : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f'(0)$

Donc f est dérivable en en 0
$(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}'(0)(\boldsymbol{x} - 0) + \boldsymbol{f}(0)$
L'équation de la tangente à la courbe en $A(0,\ f(0))$ est : $(\boldsymbol{T})$: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$

Exercice12 : soit f une fonction définie par :

$\begin{cases} f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2}\dots 0\leq x\leq 1 \\ f(x)=\sqrt{x^3-x}\dots x\succ 1 \end{cases}$

1)déterminer le domaine de définition de f
2)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$ et donner une interprétation géométrique du résultat
3)étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow 1-x^2\geq 0$ et $0\leq x\leq 1$ ou $x^3-x\geq 0$ et $x\succ 1$
$x\in D_f \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$ ou $x\succ 1$
$x\in D_f \Leftrightarrow x\in[0;+\infty[$ donc : $D_f=[0;+\infty[$

2) étude de la dérivabilité de f à droite de $x_0=0$
On a : $f(0)=1$

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{(1+x)\sqrt{1-x^2}-1}{x}=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-1}{x}$

$=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x^2}{x\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)}=\sqrt{1-x^2}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}+1}$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1=f'_d(0)$

Donc f est dérivable à droite en 0
Interprétation géométrique du résultat :
La courbe de f admet un demi tangent en $A(0,\ 1)$.de coefficient directeur $1=f'_d(0)$

3)a)étudie de la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$ On a : $f(1)=0$ soit $0\leq x\leq 1$

$\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{(1+x)\sqrt{1-x^2}}{x-1}=\dfrac{(1+x)\left(1-x^2\right)}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Et puisque : $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}-(1+x)^2=-4$

Alors : $\lim_{x\to1^-}\frac{-(1+x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=-\infty$ donc : $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0=1$

b)soit $x\succ1$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x^3-x}-0}{x-1}=\frac{x(x+1)(x-1)}{(x-1)\sqrt{x^3-x}}=\frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}$$

Et puisque : $\lim_{x\to1^+}\sqrt{x^3-x}=0^+$ et $\lim_{x\to1^+}x^2+x=2$

Alors : $\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x}{\sqrt{x^3-x}}=+\infty$ donc : $\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0=1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent en A(1,0) parallèle à l'axe des ordonnées dirigé vers le le haut

Exercice13 : soit f une fonction définie par :

$f(x)=|x^2-1|$

1)étudier la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

2)étudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3)étudier la dérivabilité de f en $x_0=1$ et donner une interprétation géométrique du résultat

4)donner l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=1$

4)donner l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=1$

Solution :1) $f(x)=|x^2-1|$

étude du signe de : x^2-1

$x^2-1=0\Leftrightarrow(x-1)(x+1)=0\Leftrightarrow x=-1 ou x=1$

Donc : $\begin{cases}f(x)=x^2-1;x\in]-\infty;-1]\cup[1;+\infty[\\ f(x)=-(x^2-1);x\in[-1;1]\end{cases}$ et

$f(1)=|1^2-1|=0$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x2-1$	$+$	0	$-$	0	$+$

1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=1$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1-0}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}x+1=2$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=1$ et $f_d'(1)=2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à droite en A(1, 0).de coefficient directeur $f_d'(1)=2$

2)

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}-(x+1)=-2$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=1$ et $f_g'(1)=-2$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet un demi tangent à gauche en A(1, 0).de coefficient directeur $f_g'(1)=-2$

3)f n'est pas dérivable en $x_0=1$ car : $f_d'(1)\neq f_g'(1)$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en A(1, 0).

4) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=1$ est :

$y=f(x_0)+f_d'(x_0)(x-x_0)$

5) l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=1$ est :

$y=f(x_0)+f_g'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(1)+f_g'(1)(x-1)\Leftrightarrow y=0-2(x-1)\Leftrightarrow(\Delta_g):y=-2x+2$

Exercice13 : Soit f la fonction définie par :

$f(x)=2x^2+x$.

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Solution :

Soit x un réel quelconque, déterminons le nombre dérivé de f en x (il est préférable d'utiliser la deuxième définition de la dérivation en un point)

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2(x+h)^2+x+h-2x^2-x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2x^2+4xh+2h^2+x+h-2x^2-x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(4x+2h+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}4x+2h+1=4x+1=f'(x)$$

On peut remarquer donc que f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$, la fonction qui associe à x son nombre dérivé $f'(x)$

S'appelle la fonction dérivée de la fonction $\boldsymbol{f}$ sur $\mathbb{R}$ et se note par f'.

Exercice14 :1- Déterminer la fonction dérivée de la fonction sin sur $\mathbb{R}$.

2- Déterminer la fonction dérivée de la fonction $x\mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}^{*+}$ et sur $\mathbb{R}^{*-}$

Exercice15 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :1) $f(x)=11$

2) $f(x)=7x+15$ 3) $f(x)=x^3$ 4) $f(x)=\sin(5x-1)$

Solution :1) $f'(x)=(11)'=0$ 2) $f'(x)=(7x+15)'=7$

3) $f'(x)=\left(x^3\right)'=3x^{3-1}=3x^2$

4) $f'(x)=\left(\sin(5x-1)\right)'=(5x-1)'\cos(5x-1)=5\cos(5x-1)$

Exercice16 :Déterminer la fonction dérivée de la fonction suivante : $f(x)=x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}$

Solution :

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'+(7x+15)'-\left(\frac{1}{x}\right)'+\left(\sqrt{x}\right)'$$

$$f'(x)=\left(x^2+7x+15-\frac{1}{x}+\sqrt{x}\right)'=2x+7+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Exercice17 : Déterminer la fonctions dérivée de la fonction suivante : $f(x)=\left(5x^2+1\right)(3x-1)$

Solution : On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left(\left(5x^2+1\right)(3x-1)\right)'=\left(5x^2+1\right)'\times(3x-1)+\left(5x^2+1\right)\times(3x-1)'$$

$$f'(x)=10x\times(3x-1)+3\left(5x^2+1\right)=30x^2-10x+15x^2+3$$

$$f'(x)=45x^2-10x+3$$

Exercice18 :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=(3x+4)^3$

Solution : On utilise la formule : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((3x+4)^3\right)'=3\times(3x+4)^{3-1}\times(3x+4)'=3\times3\times(3x+4)^{3-1}=9(3x+4)^2$$

Exercice19 :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{1}{\sin x}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{(\sin x)^2}=-\frac{\cos x'}{(\sin x)^2}$$

Exercice20 :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\frac{3x-1}{x+2}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)'=\frac{(3x-1)'(x+2)-(3x-1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{3(x+2)-1\times(3x-1)}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

Exercice21 :Déterminer la fonction dérivée de la fonction : $f(x)=\sqrt{x^2+8x}$

Solution : On utilise la formule : $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x^2+8x}\right)'=\frac{\left(x^2+8x\right)'}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{2x+8}{2\sqrt{x^2+8x}}=\frac{x+4}{\sqrt{x^2+8x}}$$

Exercice22 : Soit $f(x)=\sqrt{x^2-x}$

Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée.

Solution : $D_f=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-x$

Et on a : $u(x)\succ0\quad\forall x\in D_f-\{0;1\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{0;1\}$

$$\forall x\in D_f-\{0;1\}\ :\ f'(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)'=\frac{\left(x^2-x\right)'}{2\sqrt{x^2-x}}=\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$$

Exercice23 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x)=4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1$ 2) $f(x)=\frac{3}{x}$

3) $f(x)=4\sqrt{x}-1$ 4) $f(x)=\cos2x+3\sin3x$

5) $f(x)=\left(3x^2+2\right)(7x+1)$ 6) $f(x)=\frac{1}{5x+7}$ 7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

Solutions :

1) $f'(x)=\left(4x^4-\frac{1}{3}x^3-x+1\right)'=4\times4x^{4-1}-\frac{1}{3}\times3x^2-1+0=16x^3-x^2-1$

2) $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=\left(3\times\frac{1}{x}\right)'=3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-3}{x^2}$

3) $f'(x)=\left(4\sqrt{x}-1\right)'=4\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}}{x}$

4) $f'(x)=(\cos2x+3\sin3x)'=-2\sin2x+3\times3\cos3x=-2\sin2x+9\cos3x$

5) $f(x)=\left(3x^2+2\right)(7x+1)$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=\left(\left(3x^2+2\right)\times(7x+1)\right)'=\left(3x^2+2\right)'\times(7x+1)+\left(3x^2+2\right)\times(7x+1)'$$

$$f'(x)=6x\times(7x+1)+7\left(3x^2+2\right)=42x^2+6x+21x^2+14=63x^2+6x+14$$

7) $f(x)=\frac{7x}{x^3+1}$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{7x}{x^3+1}\right)'=\frac{(7x)'(x^3+1)-7x(x^3+1)'}{(x^3+1)^2}=\frac{7(x^3+1)-7x\times 3x^2}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{7x^3+7-21x^3}{(x^3+1)^2}=\frac{7-14x^3}{(x^3+1)^2}$$

Exercice24 : Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes ;

1. $f(x)=-2x^4+x^3+5x^2+x+1$
2. $f(x)=(3x^2+1)(2x+3)$
3. $f(x)=\frac{3x^2+x}{5x^2+1}$ 4. $f(x)=\frac{3x^2+x}{5x^2+1}$
5. $f(x)=\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x^2+1}$ 6. $f(x)=\frac{\sin 2x}{\cos 3x+1}$

Exercice25 : déterminer $f'(x)$ dans les cas suivants :1) $f(x)=9x+2$ 2) $f(x)=5x^2-3x+2$

3) $f(x)=x+\frac{2}{x}$ 4) $f(x)=\frac{5x+2}{3x-1}$

5) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ 6) $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^5}$

7) $f(x)=(5x^3-3)^4$ 8) $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+4}$

9) $f(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ 10) $f(x)=x+\frac{x^2}{x-1}$

11) $f(x)=\sqrt{\frac{2x+1}{x-3}}$ 12) $f(x)=x\cos x$

13) $f(x)=\tan^2 x$ 14) $f(x)=\cos x\times\sin x$

15) $f(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$ 16) $f(x)=\frac{(1+2x+x^2)^5}{4}$

17) $f(x)=1+x+\frac{x-1}{\sqrt{2+x^2}}$ 18) $f(x)=\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$

Exercice 26: Etudier le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée dans les cas suivants :

1) $f(x)=x^2+3x-1$ 2) $f(x)=4\sin x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ 4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 6) $f(x)=\frac{6}{4x^2+3x-1}$

7) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ 8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

9) $f(x)=(2x+3)^5$

Solution : 1) $f(x)=x^2+3x-1$ $D_f=\mathbb{R}$

f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=(x^2)'+(3x-1)'=2x+3$

2) $f(x)=4\sin x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=4u(x)$ avec $u(x)=\sin x$

Puisque u est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=4(u(x))'=4\cos x$

3) $f(x)=x^4\cos x$ $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=u(x)\times v(x)$ avec $u(x)=x^4$ et $v(x)=\cos x$

Puisque u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

On utilise la formule : $(u\times v)'=u'\times v+u\times v'$

$$f'(x)=((x^4)\times(\cos x))'=(x^4)'\times(\cos x)+(x^4)\times(\cos x)'$$

$$f'(x)=4x^3\times(\cos x)-x^4\times\sin x=4x^3\cos x-x^4\times\sin x$$

4) $f(x)=\sqrt{x}+x^3$ $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

$f(x)=u(x)+v(x)$ avec $u(x)=\sqrt{x}$ et $v(x)=x^3$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et v est dérivables en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$ alors f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)=(u(x))'+(v(x))'=\frac{2}{2\sqrt{x}}+3x^2$

5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ $D_f=\mathbb{R}^{*+}=]0;+\infty[$

On a : $f(x)=\frac{1}{u(x)}$ avec $u(x)=\sqrt{x}$

Puisque u est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc f est dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$

On utilise la formule : $\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$

$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$: $f'(x)==\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

6) $f(x)=\frac{6}{4x^2+3x-1}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{-1;\frac{1}{4}\right\}$

est on a : $f(x)=\frac{6}{u(x)}$ avec $u(x)=4x^2+3x-1$

$$f'(x)=6\left(\frac{1}{u(x)}\right)'=6\left(-\frac{u'}{u^2}\right)=-6\frac{\left(4x^2+3x-1\right)'}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}-6\frac{8x+3}{\left(4x^2+3x-1\right)^2}$$

7) $f(x)=\frac{4x-3}{2x-1}$ $\quad D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Puisque f est une fonction rationnelle alors il dérivable sur $D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

$f(x)=u(x)/v(x)$ avec $u(x)=4x-3$ et $v(x)=2x-1$

On utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{4x-3}{2x-1}\right)'=\frac{(4x-3)'(2x-1)-(4x-3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4(2x-1)-2\times(4x-3)}{(2x-1)^2}=\frac{8x-4-8x+6}{(2x-1)^2}=\frac{2}{(2x-1)^2}$$

8) $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ $\quad$: $D_f=]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$

On a : $f(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=x^2-4$

Et on a : $u(x)\succ 0\quad \forall x\in D_f-\{-2;2\}$

Donc f est dérivables sur $D_f-\{-2;2\}$

$$\forall x\in D_f-\{-2;2\}\ :\ f'(x)=\left(\sqrt{x^2-4}\right)'=\frac{\left(x^2-4\right)'}{2\sqrt{x^2-4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

9) $f(x)=(2x+3)^5$ $\quad D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=(u(x))^5$ avec $u(x)=2x+3$

On utilise la formule : $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}\times u'$

$$f'(x)=\left((2x+3)^5\right)'=5\times(2x+3)^{5-1}\times(2x+3)'=5\times2\times(2x+3)^4$$

$$f'(x)=10(2x+3)^4$$

Exercice27 : soit f une fonction définie sur $I=]-\pi;\pi[$ par : $\begin{cases} f(x)=2\dfrac{\cos x-1}{\sin x};si...0\prec x\prec\pi \\ f(x)=\dfrac{x|x+1|}{x-1};si...-\pi\prec x\leq 0\end{cases}$

1)monter que f est dérivable en $x_0=0$ et donner l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0=0$

2)a)étudier la dérivabilité de f en $x_0=-1$

b)donner les équations des demies tangentes à a la courbe de f en en $x_0=-1$

Solution : 1)étude de la dérivabilité de f à droite en $x_0=0$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}2\frac{\cos x-1}{x\sin x}=\lim_{x\to0^+}-2\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2\times\frac{1}{2}\times1=-1=f_d'(0)$$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=0$ et $f_d'(0)=-1$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{|x+1|}{x-1}=\lim_{x\to0^-}\frac{x+1}{x-1}=-1=f_g'(0)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=0$ et $f_g'(0)=-1$

Et puisque : $f_d'(0)=f_g'(0)$

Donc f est dérivable à en $x_0=0$ et $f'(0)=-1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe de f admet une tangent en O(0, 0).de coefficient directeur $f'(0)=-1$

l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0=0$ est : $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$y=f(0)+f'(0)(x-0)$

$y=0-1(x-0)\Leftrightarrow(T):y=-x$

2) $\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}=f_d'(-1)$

Donc f est dérivable à droite en $x_0=-1$ et $f_d'(-1)=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x}{x-1}=-\frac{1}{2}=f_g'(-1)$$

Donc f est dérivable à gauche en $x_0=-1$ et $f_g'(-1)=-\frac{1}{2}$ mais on a : $f_d'(-1)\neq f_g'(-1)$

Donc f n'est pas dérivable en $x_0=-1$

Interprétation géométrique du résultat :

La courbe admet un point anguleux en A(-1, 0).

b) l'équation de la demie tangente à droite a la courbe de f en en $x_0=-1$ est :

$y=f(-1)+f_d'(-1)(x+1)$ avec $x\geq-1$

$y=0+\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow(T_d):y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ avec $x\geq-1$

l'équation de la demie tangente à gauche a la courbe de f en en $x_0=-1$ est :

$y=f(-1)+f_g'(-1)(x+1)$ avec $x\leq-1$

$y=0-\frac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow (T_g): y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ avec $x\leq -1$

Exercice28 : soit f une fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{3x-2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$$

1)déterminer le domaine de définition D_f de f

2) déterminer le domaine de dérivation de f et déterminer sa fonction dérivée

Solution : 1) $x\in D_f \Leftrightarrow 3x-2\geq 0$ et $x-1\neq 0$

Donc : $D_f=\left[\frac{2}{3};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2) on a $f(x)=g(3x-2)\times h(x)$

Avec : $h(x)=\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3$ et $g(x)=\sqrt{x}$

On sait que : g est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et la fonction polynôme D_f $x\to 3x-2$ est dérivable sur D_f

$3x-2\succ 0\Leftrightarrow x\succ\frac{3}{2}$ donc la fonction $x\to g(3x-2)$ est dérivable sur $D_f-\left\{\frac{2}{3}\right\}$

donc : f est dérivable sur $D_f-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ cad $D_{f'}=D_f-\left\{\frac{2}{3}\right\}$

$\forall x\in D_{f'}$:

$$f'(x)=\left(g(3x-2)\right)'\times h(x)+g(3x-2)\times\left(h(x)\right)'$$

$$\left(g(3x-2)\right)'=(3x-2)'\times g'(3x-2)=3\times\frac{1}{2\sqrt{3x-2}}$$

Car : $g'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\left(h(x)\right)'=3\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'\times\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

$$\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x+1)'(x-1)-(2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

Donc :

$$f'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}\times\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^3+\sqrt{3x-2}\,\frac{-9}{(x-1)^2}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2$$

Exercice29 :en utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$

Solution:1) on pose : $f(x)=(x+2)^{2018}$ on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en -1 et

$f(-1)=(-1+2)^{2018}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$

Et puisque : $f'(x)=2018(x+2)^{2017}(x+2)'=2018(x+2)^{2017}$

Donc : $f'(-1)=2018\times 1^{2017}=2018$

Donc: $\lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+2)^{2018}-1}{x+1}=2018$

2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}$ on pose $f(x)=2\sin x$

on a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier en $\frac{\pi}{6}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{x-\left(\frac{\pi}{6}\right)}=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$

Et puisque : $f'(x)=2\cos x$

Donc : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{6}=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

Donc : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin x-1}{x-\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement
Aux calculs et exercices Que l'on devient
Un mathématicien