

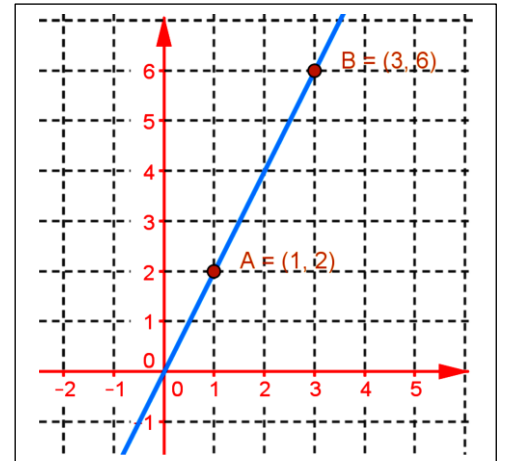


I. Rappel :

1. Coefficient directeur et vecteur directeur d'une droite :

On considère la droite (AB) passant A(1,2) et B(3,6) .

- Le coefficient directeur est : $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6-2}{3-1} = 2$.
- Vecteur directeur est : $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- Equation cartésienne de (AB) est de la forme
(AB) : $y = m(x - x_A) + y_A$
- (aussi (AB) : $y = m(x - x_B) + y_B$. d'où équation cartésienne de (AB) est (AB) : $y = 2(x - 1) + 2 = 2x$
ou encore : (AB) : $y = 2(x - 3) + 6 = 2x$.



2. Vitesse moyenne :

- Lorsque la vitesse d parcourue par solide en mouvement est exprimée en fonction du temps t .
on a la distance d parcourue par ce solide à l'instant t est $d(t) = f(t)$.
- La vitesse moyenne c'est la vitesse du solide entre l'instant t_1 et t_2 est

$$V_m[t_1, t_2] = \frac{\Delta_d}{\Delta_t} = \frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} .$$

- Exemple :

On suppose que la distance traverser par un solide en mouvement est exprimée en fonction du temps t est $d(t) = f(t) = 10t^2$ tel que d est exprimée en km et t en h (heure) .

On calcule la vitesse moyenne du solide entre $t_1 = 1h$ et $t_2 = 2h$ on a

$$V_m[t_1, t_2] = V_m[1, 2] = \frac{\Delta_d}{\Delta_t} = \frac{d(2) - d(1)}{2 - 1} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{40 - 10}{1} = 30 \text{ km/h} .$$

Remarque :

- Les physiciens exprime les variation par Δ .

Exemple :

- les variances entre les abscisses x_1 et x_2 est $\Delta x = x_2 - x_1$.
- Les variations entre les ordonnées est $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ est $\Delta y = y_2 - y_1$.

- Les petites variations sont exprimées par d .

Exemple :

- On considère $x_2 = x_1 + h$ donc $\Delta x = h$ et on considère h tends vers 0 donc ce cas on écrit dx au lieu de Δx .

3. Approche :

- Approche n° 1 :

- Un athlète parcourt une distance de 5 km en 10 minutes . que représente la grandeur 30 km/h pour l'athlète ?
- 30 minutes était suffisante pour remplir un réservoir de volume 3 m³ que représente la grandeur 100 l/min ?



- Une voiture a parcouru une distance de 200 km pendant deux heures .
que représente la grandeur 100 km/h .
- Une cartouche de chasse a parcourue une distance de 300 m une durée de $8 \cdot 10^{-4} \text{ s}$.
que représente la grandeur 375 m/s ?
- ❖ Approche n° 2 :
 - Après 10 minutes de départ d'une course la vitesse d'un athlète était 35 km/h .
que représente la grandeur 35 km/h pour l'athlète ?
 - Après 20 s de lancement de remplir un réservoir le débit était 80 l/min .
 - Le moment où la voiture heurte l'arbre la vitesse de la voiture était 120 km/h .
que représente la grandeur 120 km/h pour la voiture ?
 - La vitesse initiale de départ d'une cartouche balle de chasse était 600 m/s
que représente la grandeur 600 m/s pour la balle de chasse ?
 - Le moment où la balle heurte l'oie la vitesse de la balle était 300 m/s .
que représente la grandeur 300 m/s pour la balle de chasse ?

II. Dérivabilité d'une fonction f au point $A(x_0, f(x_0))$ (au point d'abscisse x_0 ou bien le point x_0) .

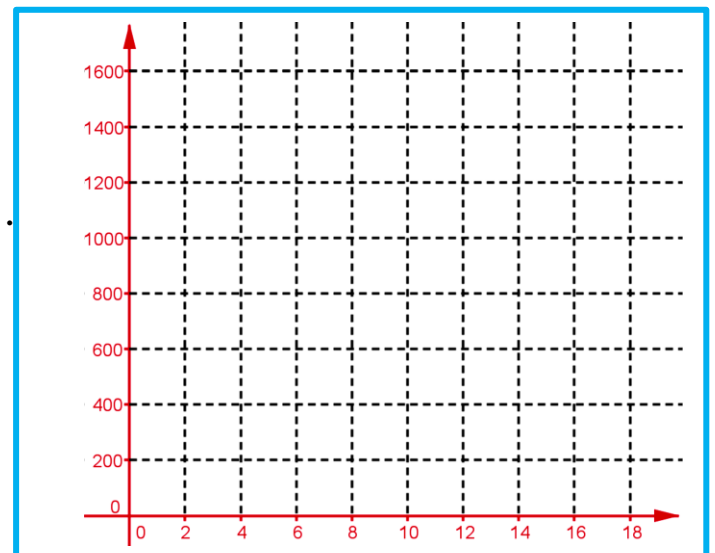
A. Dérivabilité d'une fonction f au point x_0

1. Activité :

La vitesse d'une voiture de course atteint pendant 10 secondes 360 km/h on suppose que l'accélération est constante , ceci applique sur le conducteur une poussée horizontale égale son poids tel que son mouvement varie uniformément est déterminé par la fonction horaire $d_t = f(t) = 5t^2$ tel que t représente la durée en seconde , $d_t = f(t)$ représente la distance en mètre parcourue par la voiture après t seconde de départ .

Le but est de calculer la vitesse de la voiture après 3 secondes .

1. Quelle est la distance parcourue par la voiture après 10 seconde ?
2. Représenter graphiquement d_t en fonction de t .
3. Donner la formule qui donne $V_m[3, 3+h]$
la vitesse moyenne entre l'instant 3 et $3+h$.
4. Calculer la vitesse moyenne pour h dans le tableau suivant (en m/s) .



0,0001	0,001	0,01	0,1	1	h
.....	$V_m(3, 3+h)$

5. D'après le tableau quelle est la valeur moyenne qui prend V_m quand h devienne très petit ?



puis l'exprimer par des symboles .

6. Que représente ce grandeur en physique ?
7. En général on prend x_0 au lieu de 3 donner l'écriture de ce grandeur .
8. On pose : $x = 3 + h$ écrire la limite précédente en utilisant la variable h .

2. Vocabulaire et notation :

Le nombre $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \ell$ (ou encore $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \ell$ est appelé la vitesse instantané de la voiture à l'instant $t = 3$ ce nombre s'appelle le nombre dérivé au point $t = 3$ et on note $\ell = f'(3)$ ou encore $\ell = \frac{df}{dx}(3)$.

On écrit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3)$ ou encore $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$

3. Cas général :

- On prend x_0 au lieu de 3 on obtient : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$ avec $f'(x_0)$ est un nombre réel .
- On pose : $x = x_0 + h$ on obtient : $x \rightarrow x_0$ au lieu de $h \rightarrow 0$ d'où :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) .$$
- Si la limite est finie on dit que la fonction est dérivable en x_0 .
- Donner la définition d'une fonction dérivable au point x_0 .

4. Définition :

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contient x_0 (ou encore $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$) .

- f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R} \right)$ on note : $\ell = f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0 . (ou encore)
- f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right)$

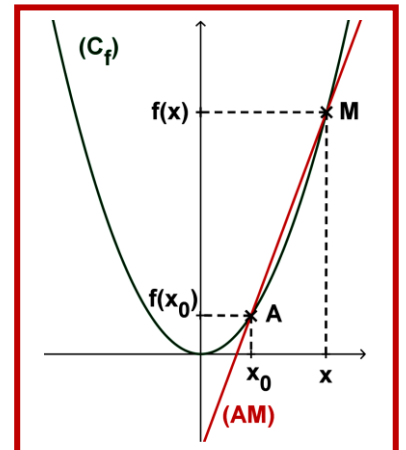
5. Remarque :

- $V(t_1)$ la vitesse instantanée à instant t_1 est

$$V(t_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{(t_1 + h) - t_1} = f'(t_1)$$
 (à condition que la limite est finie) .
- Ou encore le nombre dérivé en t_1 de la fonction d (fonction f)
c.à.d. $V(t_1) = d'(t_1) = f'(t_1)$

Exemple : On suppose que la distance parcourue par un solide en mouvement exprimée en fonction de t est $d(t) = f(t) = 10t^2$ tel que d en km et t en h (heure) .

On calcule la vitesse instantanée du solide en $t_1 = 1h$, on a :





$$\lim_{h \rightarrow 0} V_m[t_1, t_1 + h] = \lim_{h \rightarrow 0} V_m[1, 1 + h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1+h) - d(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10(1+h)^2 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h^2 + 20h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 10h + 20 = 20$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} V_m[t_1, t_1 + h] = \lim_{h \rightarrow 0} V_m[1, 1 + h] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(1+h) - d(1)}{(1+h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10(1+h)^2 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h^2 + 20h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 10h + 20 = 20$$

Conclusion : la vitesse instantanée à l'instant $t_1 = 1h$ est $V(t_1) = 20 \text{ km/h}$.

B. Interprétation géométrique du nombre dérivé – tangente à une courbe d'une fonction a un point :

1. Activité :

• $A \begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ et $M \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ deux points de la courbe (C_f) .

• f est une fonction dérivable au point x_0 .

1. Donner le coefficient directeur et vecteur directeur de (AM) .
2. Quand x tend vers x_0 , quelle est la position de la droite (AM) ? déterminer le coefficient directeur de cette position que l'on note (T) .
3. Donner l'équation réduite de (T) puis on déduit l'équation cartésienne de (T) .

2. Propriété :

- f est une fonction dérivable au point x_0 .
- (C_f) sa courbe représentative dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- ❖ Le nombre dérivé $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la droite tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0, f(x_0))$ (le point x_0).
- ❖ Equation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $A(x_0, f(x_0))$ est $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$

3. Exemple :

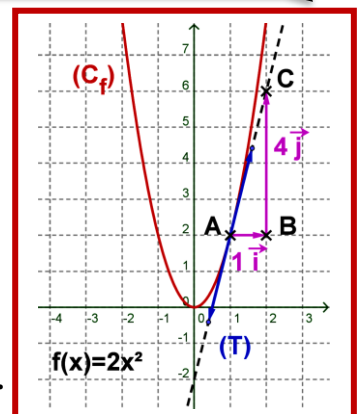
1. Trouver équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point $x_0 = 1$ avec $f(x) = 2x^2$.

L'équation est $(T): y = (x - 1)f'(1) + f(1)$ ou $(T): y = (x - 1) \times 4 + 2$.

D'où le coefficient directeur est $m = 4$ et vecteur directeur est : $\vec{u}(1, 4) = 1\vec{i} + 4\vec{j}$

A partir du point $A(1, f(1))$ avec $f(1) = 2$

- On construit le point B tel que $\overrightarrow{AB} = 1\vec{i}$ et on construit le point C tel que $\overrightarrow{BC} = 4\vec{j}$.

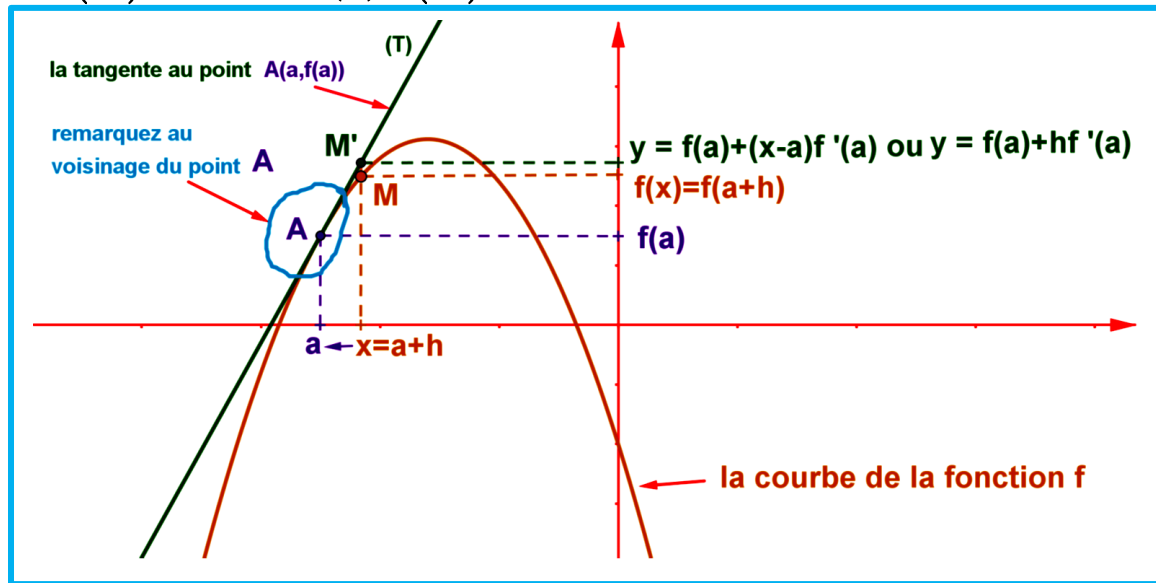




- D'où la droite (AC) est la tangente (T) à (C_f) au point A .
- Pour tracer la tangente il suffit de tracer un segment dans les extrémités on met des flèches son milieu est A .

C. Approximation affine d'une fonction dérivable en un point .

1. **Approximation affine d'une fonction f en un point a :** c'est de trouver une fonction affine $g(x) = mx + p$ qui sera à peu près-égale la fonction $f(x)$ au voisinage du point $A(a, f(a))$ ou encore $f(x) \approx mx + p$. On sait que au voisinage $A(a, f(a))$ la courbe (C_f) et la tangente (T) à (C_f) à ce point s'approche beaucoup .



- On considère le point $M(x, f(x))$ de (C_f) la courbe de f , puis le point $M'(x, y)$ de la tangente (T) de f au point a .

Remarque :

- Au point $A(a, f(a))$ la courbe de f et la tangente (T) de f au point a s'approche beaucoup
 - Quant x tend vers a (c.à.d. on pose $x = a + h$ avec $h \rightarrow 0$) dans ce cas le point M tend vers M' ; donc les ordonnées de M et M' s'approche de la même valeur d'où : $f(a+h) \approx y$ ou encore $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$
 - Si on pose : $x = a + h$ on obtient $f(x) \approx (x-a)f'(a) + f(a)$.

2. Définition :

f est une fonction dérivable au point a .

- La fonction u tel que : $u : x \rightarrow f(a) + (x-a)f'(a)$ (ou encore $(x-a=h)$; $v : h \rightarrow f(a) + hf'(a)$) est appelée la fonction affine tangente à la fonction f au point a .
- Quand x est très proche de a le nombre $f(a) + (x-a)f'(a)$ est une approximation affine de $f(x)$ au voisinage de a on écrit : $f(x) \approx f(a) + (x-a)f'(a)$.
- Ou encore le nombre $f(a) + hf'(a)$ est approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de zéro on écrit $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ avec $x-a=h$.

**3. Exemple :**❖ **Exemple 1 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $f(1+h)$ avec $f(x) = x^2$ et $a = 1$.

Correction :

f est une fonction dérivable au point 1 avec $f'(1) = 2$ approximation affine de $f(1+h)$ est :

$$f(1+h) \approx hf'(1) + f(1) \approx 2h + 1.$$

$$\text{Conclusion : } f(1+h) = (1+h)^2 \approx 2h + 1.$$

Application du résultat :

On prend $h = 0,001$ d'où : $f(1,001) = f(1+0,001) \approx 2 \times 0,001 + 1$ donc $f(1+0,001) \approx 1,002$.

On vérifie : $f(1,001) = (1,001)^2 = 1,002001$ donc $1,002 \approx 1,002001$.

Technique de calcul : $(1+h)^2$ avec h très proche de zéro on calcule $2h + 1$.

❖ **Exemple 2 :**

1. Trouver une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

Correction :

On pose $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 9$ et $h = 0,002$ d'où $\sqrt{9,002} = f(9+0,002)$.

On calcule le nombre dérivé de f en 9 on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9+h) - f(9)}{h} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6} \in \mathbb{R}$$

D'où : f est dérivable au point 9 et le nombre dérivée en 9 est $f'(9) = \frac{1}{6}$.

On trouve une approximation affine du nombre $\sqrt{9,002}$.

On a : $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$ d'où $f(9+0,002) \approx f(9) + 0,002 \times f'(9)$.

Donc : $f(9+0,002) \approx \sqrt{9} + 0,002 \times \frac{1}{6}$ par suite $f(9+0,002) \approx 3,000333333$.

On remarque que $\sqrt{9,002} \approx 3,000333333$ la calculatrice donne : $\sqrt{9,002} \approx 3,000333315$ d'où la précision est 3×10^{-8} .

4. Remarque :

- Pour la fonction : $f(x) = x^2$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = (1+h)^2 \approx 1 + 2h$.
- Pour la fonction : $f(x) = x^3$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = (1+h)^3 \approx 1 + 3h$.
- Pour la fonction : $f(x) = \sqrt{x}$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$.
- Pour la fonction : $f(x) = \frac{1}{x}$ et $a = 1$ on a : $f(1+h) = \frac{1}{1+h} \approx 1 - h$.

III. Dérivabilité à droite et à gauche :**A. Le nombre dérivée à droite – à gauche :**



1. Activité :

f est une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ f(x) = 3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

2. Vocabulaire :

- On dit que f est dérivable à droite du point $a = 1$ et le nombre dérivé à droite de 1 est $f'_d(1) = 2$.
- On dit que f est dérivable à gauche du point $a = 1$ et le nombre dérivé à gauche de 1 est $f'_g(1) = 6$.
- f n'est pas dérivable au point $a = 1$.

3. Définition :

f est une fonction définie sur $I_d = [x_0; x_0 + \alpha[$ (à droite de x_0).

- f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right) \ell_d = f'_d(x_0)$

s'appelle le nombre dérivé à droite de f en x_0 .

f est une fonction définie sur $I_g =]x_0 - \alpha; x_0]$ (à gauche de x_0).

- f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R}$. $\left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \right) \ell_g = f'_g(x_0)$

s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0 .

4. Propriété :

f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contient x_0 .

f est une fonction dérivable au point x_0 si et seulement si :

f est dérivable à droite de x_0 et f est dérivable à gauche de x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

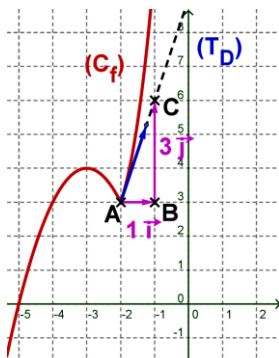
5. interprétation géométrique du nombre dérivé à droite et à gauche équation de deux demi tangentes :

soit $\begin{cases} f(x) = (x+3)^3 + 2 & ; x \geq -2 \\ f(x) = -(x+3)^2 + 4 & ; x < -2 \end{cases}$ on a $f'_d(-2) = 3$ et $f'_g(-2) = -2$

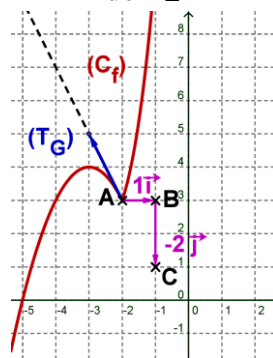
- équation du demi tangente à droite de -2 est $(T_d): y = (x - x_0)f'_d(x_0) + f(x_0)$ avec $x \geq x_0$.

- équation du demi tangente à gauche de -2 est $(T_g): y = (x - x_0)f'_g(x_0) + f(x_0)$ avec $x \leq x_0$.

Demi tangente à droite de -2

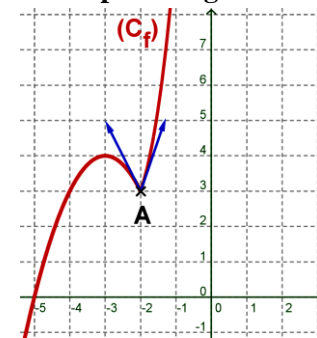


Demi tangente à gauche de -2



Demi tangente en -2 le point A $(-2, 3)$

est un point anguleux



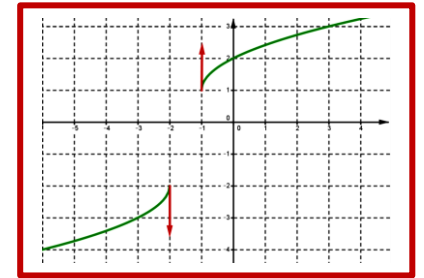


6. application :

$f(x) = |x - 3|$ «étudier la dérivabilité de f au point $x_0 = 3$.

7. demi tangente parallèle à l'axe des ordonnées :

exemple $f(x) = \sqrt{(x+1)(x+2)}$.



❖ à droite de $x_0 = 1$ on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \infty$.

donc (C_f) admet demi tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à droite du point $M(1, f(1))$

❖ à gauche de $x_0 = -1$ on a : $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \infty$. donc (C_f) admet demi

tangente verticale (parallèle à l'axe des ordonnées) à gauche du point $M(-1, f(-1))$.

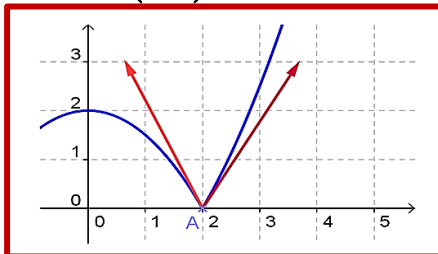
8. points anguleux :

le cas où les demis tangentes de même point

$A(x_0, f(x_0))$ n'ont pas même support (n'ont pas même coefficient directeur) , le point $A(x_0, f(x_0))$ est appelé point anguleux .

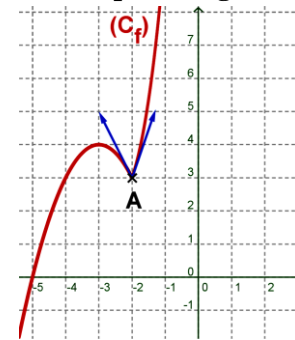
❖ Exemple 1 : le point $A(-2, 3)$ est un point anguleux .

❖ Exemple 2 : le point $A(2, 0)$ est un point anguleux .



Demi tangente en -2 . le point $A(-2, 3)$

est un point anguleux



IV. Dérivabilité sur un intervalle :

1. Un intervalle de la forme $]a, b[$ ou de la forme $[a, b[$.

Définition :

- f est une fonction dérivable sur $I =]a; b[$ si et seulement si f est d dérivable en tout point x_0 de I .
- f est une fonction dérivable sur $[a; b[$ si et seulement si f est d dérivable sur $I =]a; b[$ et f est dérivable à droite du point a .

V. La fonction dérivée d'une fonction :

1. Définition :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction g qui relie chaque élément x de I par le nombre $f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f et on note : $g = f'$.

Ou encore $g : I \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow g(x) = f'(x)$ g s'appelle la fonction dérivée de f on note : $g = f'$.



2. Activité :

Déterminer f' la fonction dérivée de f sur $D_f = \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$; ($c \in \mathbb{R}$)

3. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et f' sa fonction dérivée sur I .

- La fonction constante $f(x) = c$; ($c \in \mathbb{R}$) est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I = \mathbb{R}$ est $f'(x) = (c)' = 0$.
- La fonction identique $f(x) = x$ est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I = \mathbb{R}$ est $f'(x) = (x)' = 1$.
- La fonction constante $f'(x) = (x^2)' = 2x$ est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I = \mathbb{R}$ est $f'(x) = (x^2)' = 2x$.
- La fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I = \mathbb{R}$ est $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.
- La fonction $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ sa fonction dérivée sur $I = \mathbb{R}$ est $f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$.
- La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sa fonction dérivée sur $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
- La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est dérivable sur $I =]0, +\infty[$ sa fonction dérivée sur $I =]0, +\infty[$ est $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

VI. La fonction dérivée seconde – dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction f .

1. Activité :

1. Donner f' la fonction dérivée de $f(x) = x$ sur \mathbb{R} .
2. Est-ce que f' est dérivable sur \mathbb{R} ?

2. Vocabulaire :

- La dérivée de f' s'appelle la fonction dérivée deuxième de f (dérivée seconde de f). on note $(f'(x))' = f''(x) = f^{(2)}(x)$.
- Si la fonction $f^{(2)}$ est aussi dérivable sur I sa fonction dérivée $(f^{(2)})'(x)$ s'appelle la fonction dérivée troisième de f (ou encore la dérivée d'ordre 3) et on note $(f^{(2)})' = f^{(3)}$.
- En général : la dérivée d'ordre n de f est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}(x)$ (la dérivée de la fonction dérivée d'ordre $n-1$) et on note $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'(x)$.

3. Application :

1. Calculer $f^{(3)}(x)$ pour $f(x) = x^5$ puis pour $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

VII. Les opérations sur les fonctions dérivables :

1. Activité :

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 .



1. Est-ce que la fonction $f + g$ est dérivable en x_0 ?
2. On suppose que la fonction $f \times g$ est dérivable sur un intervalle I et sa fonction dérivée vérifie $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. on déduit que les fonctions suivantes αf et $f^2 = f \times f$ et $f^3 = f \times f \times f$ et $\dots f^n$ sont dérivables sur I et déterminer leurs fonctions dérivées.
3. On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur I ($\forall x \in I, g(x) \neq 0$), f et g sont dérivables sur I .
montrer que les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont dérivables sur I , puis déterminer leurs fonctions dérivées.

2. Propriété :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur I . on a :

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$.
- La fonction αf est dérivable sur I et $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
- La fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I $\forall x \in I, g(x) \neq 0$ et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$.

3. Application :

Calculer f' pour les fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = 7$; 2) $f(x) = x$; 3) $f(x) = 5x$; 4) $f(x) = 5x + 7$; 5) $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$.

VIII. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles - $g(x) = \sqrt{f(x)}$ et $f^n(x)$ et $f(ax + b)$.

A. Dérivabilité des fonctions : polynomiales – rationnelles :

1. Propriété :

- Toute fonction polynomiale est dérivable sur son ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$ et $(ax^n)' = nax^{n-1}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition D_f .

B. Dérivabilité de la fonction $f^n(x)$:

1. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- La fonction f^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I et on a : $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$.
- Si pour tout x de I ; $f(x) \neq 0$ on a la fonction $f^p(x)$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$ est dérivable sur I et $(f^p)'(x) = pf^{p-1}(x)f'(x)$.

2. Exemple : Calculer : $g'(x)$ pour $g(x) = (-2x^4 + 5x^2 + x - 3)^7$.

Correction : $g'(x) = [(-2x^4 + x - 3)^7]' = 7(-2x^4 + x - 3)^6 (-2x^4 + x - 3)' = 7(-2x^4 + x - 3)^6 (-8x^3 + 1)$.



C. Dérivabilité de la fonction de la forme $f(ax+b)$:

1. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I , a et b de \mathbb{R} . J est l'ensemble des réels x tel que $ax+b \in I$. la fonction $g : x \mapsto g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur J avec :

$$\forall x \in J ; g'(x) = [f(ax+b)]' = af'(ax+b).$$

2. Application :

On suppose que : $(\sin(x))' = \cos(x)$ calcule $g(x) = \sin(5x+3)$.

D. Dérivabilité des fonctions de la forme $\sqrt{f(x)}$.

1. Propriété :

f est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I .

La fonction $g(x) = \sqrt{f(x)}$ est dérivable sur un intervalle I avec $\forall x \in I : (\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

2. Exemple : $g(x) = \sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}$ on calcule $g'(x)$.

$$\text{On a : } (g(x))' = (\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1})' = \frac{(x^6 + 5x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}} = \frac{(6x^5 + 10x)}{2\sqrt{x^6 + 5x^2 + 1}}$$

IX. Dérivabilité des fonctions trigonométriques :

1. Activité : On considère la fonction $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \sin(x)$

1. Montrer que les fonctions f et g sont dérivables en $x_0 \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction $g(x) = \tan(x)$ est dérivable en x_0 tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

2. Propriété :

• La fonction $f(x) = \cos(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = (\cos(x))' = -\sin(x)$.

• La fonction $f(x) = \sin(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} avec $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$

• La fonction $f(x) = \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ avec $f'(x) = (\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ou

encore $f'(x) = (\tan(x))' = 1 + \tan^2 x$

3. Conséquence :

• $(\cos(ax+b))' = -a \sin(ax+b)$. $(\sin(ax+b))' = a \cos(ax+b)$. $(\tan(ax+b))' = a(1 + \tan^2(ax+b))$.

4. Exemple :

$f(x) = 3\sin(9x+3) - 4\cos^3(8x-1) + 3\tan^6(7x+3)$ on calcule $f'(x)$. On a :

$$\begin{aligned} (f(x))' &= (3\sin(9x+3) - 4\cos^3(8x-1) + 3\tan^6(7x+3))' \\ &= 3 \times 9\cos(9x+3) - 4 \times 3(\cos(8x-1))' \cos^2(8x-1) + 3 \times 6(\tan(7x+3))' \tan^5(7x+3) \\ &= 27\cos(9x+3) - 12 \times 8\sin(8x-1)\cos^2(8x-1) + 18 \times 7(1 + \tan^2(7x+3))\tan^5(7x+3) \end{aligned}$$



Conclusion : $f'(x) = 27\cos(9x+3) - 96\sin(8x-1)\cos^2(8x-1) + 126(1+\tan^2(7x+3))\tan^5(7x+3)$

X. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles :

La fonction f	D_f Domaine de définition de f	La fonction dérivée f'	$D_{f'}$ Domaine de définition de f'
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f = [0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} =]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$	$f'(x) = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{1\}; f(x) = x^n$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$

XI. Operations sur les fonctions dérivées :

Addition	$(f+g)' = f' + g'$	L'inverse	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$
multiplication	$(\alpha f)' = \alpha f'$ $(fg)' = f'g + fg'$	quotient	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
Puissance	$(f^n)' = n \times f' \times f^{n-1}$ $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$	Racine carrée	$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$



XII. Applications de la fonction dérivée première :

Remarque :

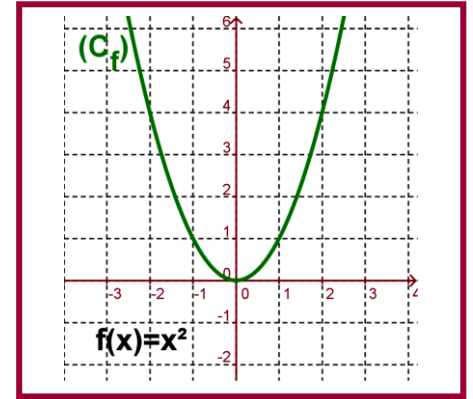
- dans le reste de ce chapitre f est une fonction numérique de la variable réelle x .
- (C_f) est sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

A. La monotonie d'une fonction et le signe de sa fonction dérivée .

1. Activité :

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction : $f(x) = x^2$.

1. Déterminer une relation entre la monotonie et la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Déterminer une relation entre la monotonie et la fonction dérivée f' sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.



2. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I alors $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I alors $\forall x \in I : f'(x) \leq 0$.
- Si f est constante sur I alors $\forall x \in I : f'(x) = 0$.

3. Démonstration :

1^{er} cas :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et f est croissante sur I .

Soit x_0 de I ; on considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; $x \in I \setminus \{x_0\}$.

Puis que f est croissante sur I donc : $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.

Puis que f est dérivable sur I et $x_0 \in I$ donc f est dérivable en x_0 donc $g(x)$ admet une limite finie en

x_0 d'où : $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$ (propriété ordre et les limites).

Puis que ceci est vrai pour tout x_0 de I donc $\forall x_0 \in I : f'(x_0) \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$

2^{ème} cas :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I et f est décroissante sur I . Démonstration analogue

4. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si la fonction dérivée f' est strictement positive sur I (f' s'annule en un points fini de I ceci ne change pas la monotonie de f) alors la fonction f est strictement croissante sur I .
- Si la fonction dérivée f' est strictement négative sur I (f' s'annule en un points fini de I ceci ne change pas la monotonie de f) alors la fonction f est strictement décroissante sur I .
- Si la fonction f' est nulle sur I (sur I tout entier) alors f est constante.



5. Exemple :

Etudier les variations de f sur \mathbb{R} avec $f(x) = (2x+4)^2$.

• On calcule : f' .

$$f'(x) = [(2x+4)^2]'$$

$$= 2(2x+4)'(2x+4) = 2 \times 2(2x+4) = 8x+16$$

• Signe de f' :

$$\text{On a } f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 8x+16 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq -2$$

Donc : f' est positive sur $[-2, +\infty[$ et négative sur $] -\infty, -2]$.

• Tableau de variation de f :

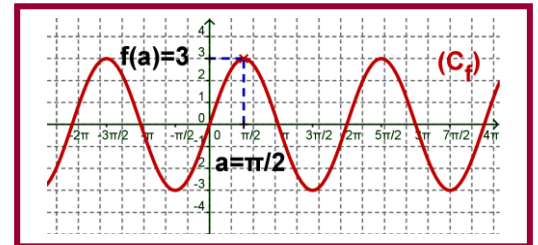
x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$+\infty$ \searrow	$f(-2) = 0$	\nearrow $+\infty$

B. Extremums d'une fonction dérivable :

1. Activité :

La figure suivante représente une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et a est un élément de I

1. Est-ce que f admet un extremum en a ?
2. Donner la valeur de $f'(a)$.



2. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .

Si f est dérivable au point a et admet un extremum au point a alors $f'(a) = 0$.

3. Remarque :

Si $f'(a) = 0$ ne signifie pas que $f(a)$ est un extremum de la fonction f .

4. Exemple :

$f(x) = 2x^3$ on a $f'(x) = 6x^2$ d'où $f'(0) = 0$ mais $f(0)$ n'est pas un extremum de la fonction f .

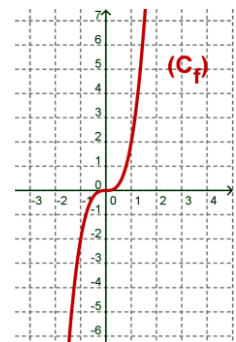
5. Propriété :

f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I , a est un élément de I .

Si f' s'annule au point a et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de la fonction f .

La fonction

$$f(x) = 2x^3$$



XIII. Equation différentielle de la forme : $y'' + \omega^2 y = 0$.

1. Introduction :

Pour les équations différentielles :

- f est une fonction ; on la note par y .
- f' est sa dérivée ; on la note par y' .
- L'écriture $f'(x) = af(x) + b$ on la note par $y' = ay + b$ on l'appelle équation différentielle linéaire de première degré de coefficients constants a et b .



- Toute fonction g dérivable qui vérifie cette équation différentielle ($g'(x) = ag(x) + b$) on l'appelle solution particulière de l'équation différentielle.
- Résoudre une équation différentielle c'est de trouver toutes les fonctions dérivables qui vérifie l'équation différentielle (c'est-à-dire de trouver la solution générale).
- Le programme se limite aux équations différentielles de la forme : $y'' + \omega^2 y = 0$ avec ω de \mathbb{R}

2. Définition :

Soit ω de \mathbb{R} , y est une fonction et y'' sa fonction dérivée deuxième (ou seconde).

L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ dont l'inconnue y s'appelle équation différentielle d'ordre 2 sans seconde membre.

Toute fonction f dérivable deux fois sur \mathbb{R} et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$ s'appelle solution particulière de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

3. Exemple :

$y'' + 9y = 0$ c'est une équation différentielle.

4. Propriété :

la solution générale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ est l'ensemble des fonctions définies par :

$y : x \mapsto \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$ avec α et β de \mathbb{R} .

5. Remarque :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ signifie de déterminer la solution générale de cet équation

6. Exemple :

Résoudre l'équation différentielle $y'' + 9y = 0$.

On a $\omega = 3$ ou $\omega = -3$ d'où la solution générale de cet équation est l'ensemble des fonctions de la forme :

$y(x) = \alpha \cos 3x + \beta \sin 3x$ avec α et β de \mathbb{R} .

7. Cas particulier :

- $y'' = 0$ donc $y' = c$ (fonction constante) d'où y est de la forme $y(x) = cx + b$ avec c et b de \mathbb{R} .

8. Exemple :

Résoudre l'équation différentielle : (E) : $y'' + 16y = 0$ avec $f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

La solution générale de l'équation différentielle (E) est de la forme $y(x) = \alpha \cos 4x + \beta \sin 4x$.

On a :

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cos(4 \times 0) + \beta \sin(4 \times 0) = 1 \\ \alpha \cos\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) + \beta \sin\left(4 \times \frac{\pi}{8}\right) = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{array} \right.$$

Conclusion : La solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie les conditions initiales

$f(0) = 1$ et $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$ est la fonction $f(x) = y(x) = \cos 4x + \sin 4x$.



XIV. Optimisation :

1. Approche :

Approche 1 :

Optimiser : du latin **optimum** qui signifie le meilleur :

- Qui nous permet de donner les meilleurs choix ou les meilleurs résultat possibles en utilisant un travail convenable d'une situation donnée .
- En mathématique : Optimiser une situation

Demande une analyse pour intégrer cette situation sous forme une fonction puis déterminer les extremums qui donne les meilleurs choix pour répondre à la question posée .

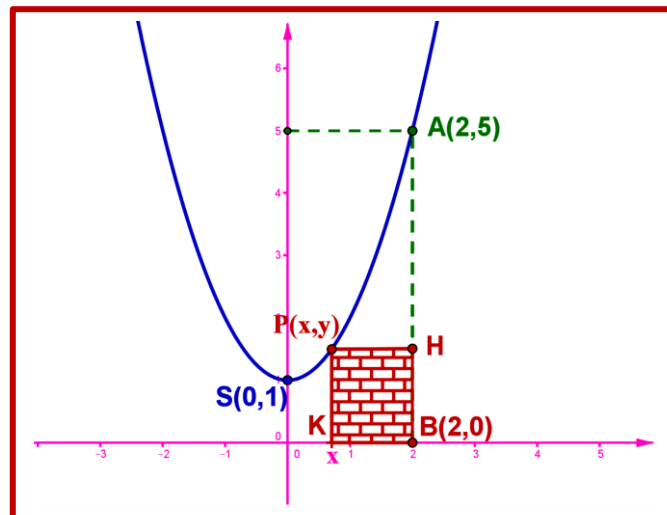
Approche 2 :

Plusieurs problèmes de la vie courante nous pousse à déterminer les valeurs maximales ou les valeurs minimales liées a une quantité variables ; tel que ces valeurs présentent les meilleurs de la situation posée ou le problème posé on appelle ces valeurs « **valeurs Optimales** » .

Déterminer ces valeurs présente un exercice ou problème « **optimisation** » .

2. Exemple :

La figure ci-contre représente un parabole de sommet $S(0,1)$ et passe par le point $A(2,5)$ puis on considère le point $B(2,0)$.



1. Déterminer $f(x)$ l'équation du parabole .
2. $P(x,y)$ est un point du parabole tel que $0 \leq x < 2$.
 - On considère le point H la projection orthogonale du point P sur la droite (AB) .
 - On considère le point K la projection orthogonale du point P sur l'axe des abscisse .
 - a. Déterminer la surface du rectangle $PHBK$ en fonction de x .
 - b. Déterminer l'abscisse du point $P(x,y)$ du parabole tel que la surface du rectangle $PHBK$ est maximale .
 - c. Déterminer la surface maximale du rectangle $PHBK$.