EXERCICES CORRIGES

Exercice n 1.

Déterminer la limite éventuelle en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$ 2) $f(x)=-x^4$ 3) $f(x)=-3+\dfrac{1}{x}$

Déterminer la limite éventuelle en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes :

4) $f(x)=-x^3$ 5) $f(x)=5+\dfrac{1}{x}$ 6) $f(x)=\sqrt{-x}$

Détermine les limites suivantes

7) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1-\dfrac{1}{x})$ 8) $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(x^2-4+\dfrac{1}{x})$ 9) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)$ 10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x-4}$ 11) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{-2+\dfrac{3}{x}}$

12) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(-x+1)$ 13) $\lim\limits_{t\to-\infty}\left(-3t(t-4)\right)$ 14) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\dfrac{1}{x}+3\right)$

Etudier le comportement de f lorsque x tend vers a avec :

15) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$, $a=2$ 16) $f(x)=\dfrac{-2}{x+3}$, $a=-3$ 17) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $a=0$

Exercice n 2.

Déterminer les limites de $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)(x-2)}$ en $x=2$ et $x=-1$.

Exercice n 3.

Détermine les limites suivantes

1) $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{x}}$ en $+\infty$ 2) $g(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $-\infty$

Exercice n 4.

Vrai ou Faux ?

1) Si une fonction f est strictement croissante et positive sur $[0;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2) Si une fonction f a pour limite 0 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

3) Si une fonction f a pour limite -1 en $+\infty$, alors, à condition de prendre x suffisamment grand, tous les nombres réels $f(x)$ sont de même signe

Exercice n 5.

f est une fonction numérique dont l'expression est $f(x)=ax+\dfrac{2}{x-b}$.

Déterminer a et b sachant que $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to5}f(x)=11$

Exercice n 6. Détermine les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}3x^2-2x+10$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}-4x^3+5x-2$ 3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+4}{x^2+x+1}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-8x^3+1}{4x+16}$ 5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ 6) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x-3}{2x^2-x-1}$ 7) $\lim\limits_{x\to9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

Exercice n 7.

Trouver deux fonctions f et g telles que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ et telles que :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-g(x)=1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=7$

Exercice n 8.

Détermine les limites suivantes : 1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$ 2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - (x+2)$

Exercice n 9.

1) Soit f une fonction telle que pour tout x 1, $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Soit f une fonction telle que pour tout x 1, $\frac{2}{x} \leq f(x) - \frac{3}{2} \leq \frac{3}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Les propriétés suivantes permettent-elles de conclure concernant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$?

3) $f(x) \geq 2x - 3$ 4) $f(x) \geq x^2 - 3$

Exercice n 10.

On considère la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x - \sqrt{x} + 4$

1) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ $f(x) \geq 3\sqrt{x}$

2) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

Exercice n 11.

Soit la fonction f définie sur $D = [0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x}$

1) Démontrer que, pour tout x de D, on a : $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x}}$.

2) Démontrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

3) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

Exercice n 12.

On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = 2x - \sin x$

1) Montrer que pour tout x réel $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$

2) En déduire les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$

Exercice n 13.

Déterminer, à l'aide des théorèmes de comparaison, les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions f suivantes (si elles existent): 1) $f(x) = \dfrac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$ 2) $f(x) = \dfrac{x \sin x}{x^2 + 1}$;

Exercice n 14.

On veut trouver la limite en $+\infty$ de $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$

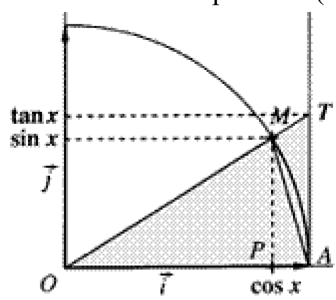
1) Montrer que pour x 0 , $x^2 < 1 + x^2 < (1+x)^2$

2) En déduire pour x 0 un encadrement de $f(x)$.

3) En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice n 15.

Soit x un réel de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points A(1;0), M(cos x;sin x), P(cos x;0) et T(1;tan x). Soit A_1 l'aire du triangle OAM, A_2 l'aire du secteur de disque OAM et A_3 l'aire du triangle OAT.



1) En comparant ces aires, prouver que : $\sin x \leq x \leq \tan x$.

2) En déduire que $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

3) Déterminer la limite de $\dfrac{\sin x}{x}$ en 0 (étudier les cas $x < 0$ et $x > 0$).

Exercice n 16.

En utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (cf exercice précédent), étudie les limites en 0 des fonctions :

1) $x\to\dfrac{\sin 5x}{2x}$ 2) $x\to\dfrac{x}{\sin 3x}$ 3) $x\to\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$ 4) $x\to\dfrac{\tan x}{x}$

Exercice n 17.

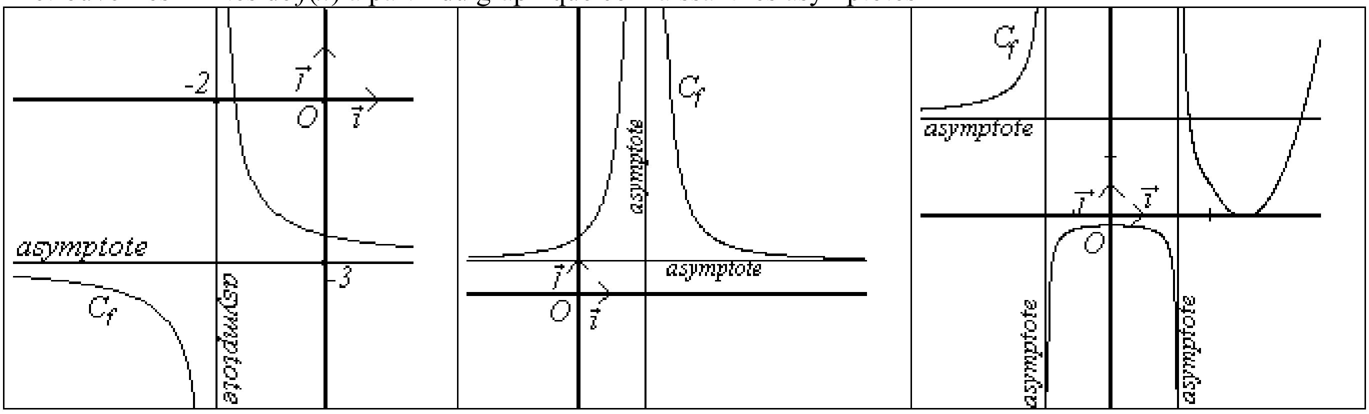
En utilisant la définition du nombre dérivé, déterminer $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$

Exercice n 18.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\cos 2x-1}{6x-\pi}$

Exercice n 19.

Retrouver les limites de $f(x)$ à partir du graphique connaissant les asymptotes

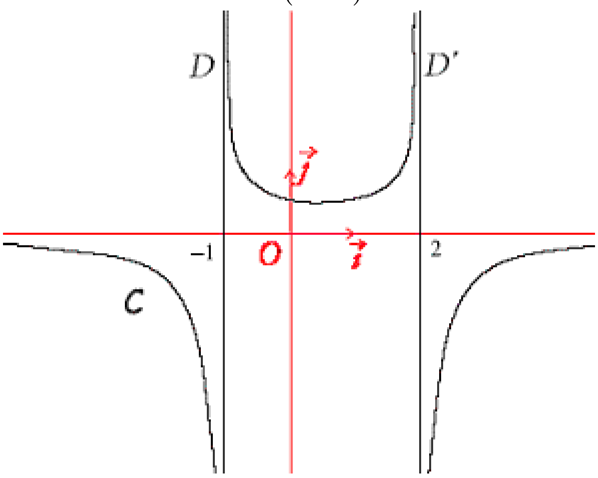


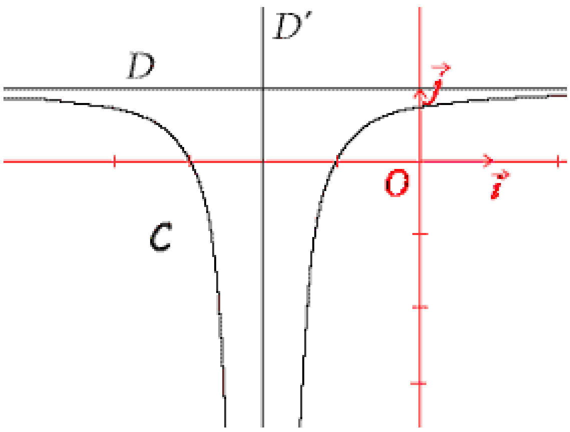
Exercice n 20.

Dans chacun des cas ci-dessous, on donne trois fonctions et la représentation graphique C de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est-ce qui permet d'éliminer les 2 autres ?)

1er cas $f_1(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$ ou $f_2(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ ou $f_3(x)=-\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

2ème cas $g_1(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ ou $g_2(x)=1-\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ou $g_3(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$





Exercice n 21.

Rechercher les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

1) $f(x)=\dfrac{3x-1}{x}$ 2) $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ 3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ 5) $f(x)=\dfrac{2x-1}{x\ -3x+2}$

Exercice n 22.

Soit f la fonction $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}$. Etudier le comportement de f en 0, $+\infty$ et $-\infty$, en précisant les asymptotes à la courbe représentative de f et les positions relatives de la courbe et de chaque asymptote.

Exercice n 23.

Soit f la fonction $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x+2}$

1) Détermine trois nombres réels a,b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ pour $x\neq -2$
2) Etudier le comportement de f en $+\infty$ (limite, asymptote sur la courbe).

Exercice n 24.

Montrer que la droite d'équation $y=x$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$

Exercice n 25.

Montrer que la droite d'équation $y=2x$ est asymptote pour $x\to+\infty$ à la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$

Exercice n 26.

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x-20}{x+3}$

1) Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2) Détermine trois réels a, b et c tels que pour tout x de D, on ait : $f(x)=ax^2+b+\dfrac{c}{x+3}$
3) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-(ax^2+b))$
4) Soit g la fonction numérique définie par : $g(x)=x^2-4$. Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ suivant les valeurs de x. En déduire les positions relatives des courbes suivant les valeurs de x.

Exercice n 27.

Pour tout réel x non nul, on considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{\left(50+x^{20}\right)^2-2500}{x^{20}}$

A l'aide de la calculatrice, remplir le tableau suivant :

x	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,01
Valeur approchée de $f(x)$							

1) Peut-on conjecturer la limite de f en éro ?

2) En développant $\left(50+x^{20}\right)^2$, simplifier l'expression de *f(x)* pour $x\neq 0$. Calculer alors la limite de f en éro. Surprenant, non ?