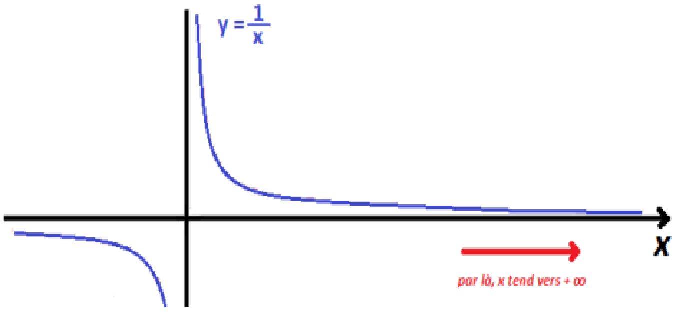
Résumé de Cours *LIMITE D'UNE FONCTION*

PROF: ATMANI NAJIB 1BAC BIOF

LIMITE D'UNE FONCTION

1)Introduction

La limite d'une fonction, c'est en gros « vers quoi tend » la fonction.
Le plus simple est de prendre un exemple : la fonction inverse : $f : x \to \frac{1}{x}$



On voit bien que quand x tend vers $+\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure sans jamais la toucher.et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose. on note cette limite de la façon suivante : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

Et on prononce cela « limite quand x tend vers plus l'infini de $\frac{1}{x}$ est égal 0 plus».

2) LIMITE FINIE EN a.

Propriété : $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$

Les fonctions : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto x^n$; $x \mapsto k|x|$; $x \mapsto k\sqrt{|x|}$; $x \mapsto k|x|^n$

Tendent vers 0 quand x rend vers 0.

Propriété : Si P est une fonction polynôme alors $\lim\limits_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$Une fonction polynôme P c'est une fonction qui s'écrit de la forme :

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 . + ... + a_n x^n$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l quand x tend vers a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) - l = 0$.

Propriété: Si sur un intervalle pointé de centre a si on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a

on a : $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Remarque :

$\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -l$

Propriété : Si f admet une limite l en a alors cette limite est unique.

3) Limite infinies en $\pm\infty$

Propriété : Les fonctions :

$x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto |x|$

Tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

4) Limite finie en $\pm\infty$

Propriétés : les fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$; $x \mapsto \frac{k}{x^2}$; $x \mapsto \frac{k}{x^n}$:

$x \mapsto \frac{k}{|x|}$; $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

et $k \in \mathbb{R}^*$ Tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

5) Limite infinies en un point

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

6) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

Théorème : Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \succ a}} f(x) = l$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \prec a}} f(x) = l$

7) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

a) Opérations sur les limites finies.

Propriété :Soient f et g deux fonctions tels que :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l'$ on a :

$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = l + l'$ et $\lim\limits_{x \to a} (f \times g)(x) = l \times l'$ et

$\lim\limits_{x \to a} |f|(x) = |l|$ et $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'}$ si $l' \neq 0$

et $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$ si $l' \neq 0$ et $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{f}(x) = \sqrt{l}$ si $l \succ 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a.

b) Opérations sur les limites

Limite de la somme

lim f	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim f+g	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers :
$a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Formes indéterminées : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

Limites des produits

$\lim f$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f\times g$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limites des inverses

$\lim f$	$\ell\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

Limites des quotients

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell\neq 0$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\lim g$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	0	ℓ	0	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	?

8) Limites d'une fonction polynôme en $\pm\infty$

Propriété : La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ **(**$-\infty$**)** est la limite de son plus grand terme

En $+\infty$ $(-\infty)$

9) Limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

Propriété : La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ **(**$-\infty$**)** est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $+\infty$ **(**$-\infty$**)**

Remarque : La propriété précédente n'est vraie que si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

10)Limites des fonctions trigonométriques.

Soit $a\in\mathbb{R}^*$ on a :

a) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

b) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

c)si $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1$

h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

11) LIMITES et ordres

Propriété 1: Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x)-l|\leq u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de a ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

Propriété2 :1) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I=]a-r;a-r[-\{a\}$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $r\succ 0$

Si f admet une limite en a et f positif sur I alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)\geq 0$

2) soit f est une fonction définit sur un intervalle de la forme $I=]a-r;a-r[-\{a\}$

avec $a\in\mathbb{R}$ et $r\succ 0$

Si f admet une limite en a et g admet une limite en a et $f\leq g$ sur I alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)\leq\lim\limits_{x\to a}g(x)$

3)si on a : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a}g(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to a}h(x)=l$ alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}}f(x)=l$

Les propriétés précédentes sont vraies si x tend vers a à droite, ou a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de a.)

Propriété3 :1) Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a : $u(x)\leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+}u(x)=+\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to a^+}v(x)=+\infty$

2)Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a : $u(x)\leq v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a^+}v(x)=-\infty$

alors : $\lim\limits_{x\to a^+}u(x)=-\infty$

La propriété précédente est vraie si x tend vers a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien