

Chapitre 9

Limite d'une fonction numérique

1 Limite à l'infini

1.1 Limite infinie en $+\infty$, en $-\infty$

Définition : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$.

On dit que f a comme limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si, pour tout nombre A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand (voir figure 1).

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty$$

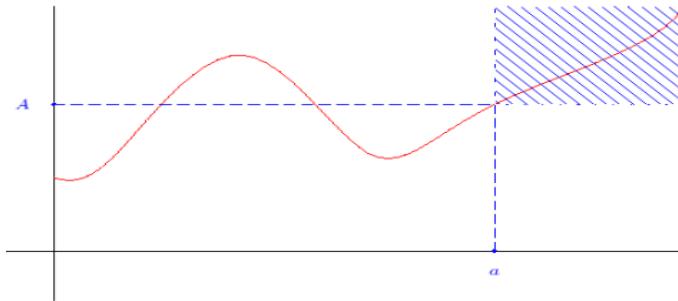


FIGURE 1 – Limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$

Remarque : On peut définir de manière analogue $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Cas des fonctions usuelles :

- Les fonctions $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow \sqrt{x}$, $x \rightarrow x^n$ (n entier strictement positif) ont comme limite $+\infty$ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \rightarrow x^2$, $x \rightarrow x^n$ (n entier pair, non nul) ont comme limite $+\infty$ en $-\infty$.
- Les fonctions $x \rightarrow x^n$ (n entier impair) ont comme limite $-\infty$ en $-\infty$.

1.2 Limite finie en $+\infty$, en $-\infty$ – Asymptote horizontale

Définition : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[\alpha; +\infty[$ et l un nombre réel.

On dit que f a comme limite l lorsque x tend vers $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand (voir figure 2).

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = l$$

Remarques : On peut définir de manière analogue $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Définition : Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$), on dit que la droite d'équation $y = l$ est **asymptote (horizontale)** à la courbe représentant f .

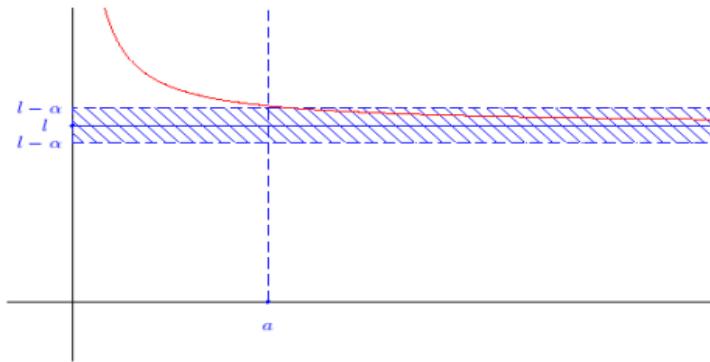


FIGURE 2 – Limite finie lorsque x tend vers $+\infty$

Remarque : Graphiquement, ceci signifie que la courbe représentant f se rapproche de plus en plus de cette droite lorsque x devient grand (voir figure 2).

Cas des fonctions usuelles :

- Les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \rightarrow \frac{1}{x}$, $x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ (n entier strictement positif) ont comme limite 0^+ en $+\infty$.
- Les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ (n entier pair, non nul) ont comme limite 0^+ en $-\infty$.
- Les fonctions $x \rightarrow \frac{1}{x^n}$ (n entier impair, non nul) ont comme limite 0^- en $-\infty$.

Remarques :

1. « 0^+ » signifie que la fonction tend vers zéro tout en restant plus grande que zéro.
2. Toutes les courbes représentatives de ces fonctions admettent l'axe des abscisses comme asymptote.

2 Limite infinie en un réel a

Définition : Soit a un réel et f une fonction définie au voisinage de a (mais pas nécessairement en a).

On dit que f a comme limite $+\infty$ lorsque x tend vers a si, pour tout nombre A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a (voir figure 3).

On note alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f = +\infty$$

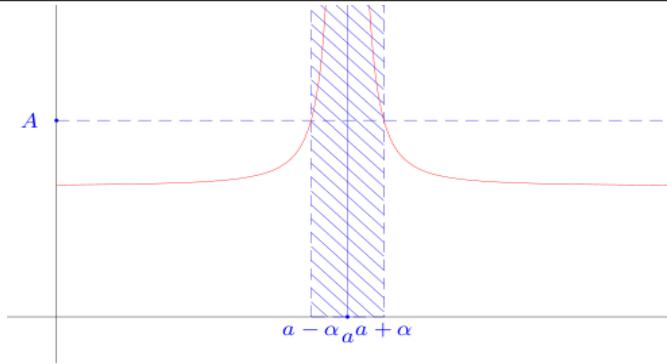


FIGURE 3 – Limite infinie lorsque x tend vers le réel a

Remarque : On peut définir de manière analogue $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.

Définition : Lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote (verticale)** à la courbe représentant f (voir figure 3).

Cas des fonctions usuelles :

- Pour $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- Pour $x \rightarrow \frac{1}{x}$: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
- Pour $x \rightarrow \frac{1}{x^2}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$
- Plus généralement :
 - si n entier pair non nul, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$;
 - si n entier impair, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

Remarque : Toutes les courbes représentatives de ces fonctions admettent l'axe des ordonnées comme asymptote.

3 Opérations sur les limites

Dans toute cette section, l et l' désignent deux nombres réels ; a désigne soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

3.1 Somme de deux fonctions

Les résultats sont résumés dans le tableau 1.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

TABLE 1 – Limite d'une somme

Remarque : « F.I. » signifie « Forme Indéterminée ». Ceci veut dire que l'on ne peut pas conclure directement à l'aide du tableau. Il faut étudier plus en détail la fonction pour « lever l'indétermination » et trouver la limite.

3.2 Produit de deux fonctions

3.2.1 Limite d'un produit

Les résultats sont résumés dans le tableau 2.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.
Il s'agit de la règle des signes										

TABLE 2 – Limite d'un produit

3.2.2 Application : limite en l'infini d'une fonction polynôme

Exemple : $f(x) = -3x^4 + x^3 - 2x + 1$

On a une forme indéterminée en $-\infty$ et en $+\infty$.

Si $x \neq 0$:

$$f(x) = x^4 \left(-3 + \frac{x^3}{x^4} - \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x^4} \right) = x^4 \left(-3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-3 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4} \right) &= -3 \end{aligned} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Remarques :

1. On a un résultat analogue lorsque x tend vers $+\infty$.
2. On peut remarquer que la limite est la même que celle de $-3x^4$. Ce résultat se généralise.

Propriété :

En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction polynôme a la même limite que son monôme de plus haut degré.

Remarque : Ce résultat n'est valable que pour les fonctions polynômes et uniquement pour l'étude des limites en l'infini.

3.3 Inverse d'une fonction

Les résultats sont résumés dans le tableau 3.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	$+\infty$	$-\infty$	0 et $f(x) > 0$	0 et $f(x) < 0$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

TABLE 3 – Limite de l'inverse

Remarque : Lorsque $f(x)$ tend vers zéro, il est nécessaire de connaître le signe de f pour conclure. Par contre, dans la plupart des cas, ce n'est pas du tout une forme indéterminée.

Exemples :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = ?$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 1 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0.$$

On a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} = ?$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$, il est nécessaire de connaître le signe de $(x^2 - 1)$ pour conclure. Il s'agit d'un trinôme du second degré, avec deux racines évidentes : -1 et 1 . De plus, le coefficient du terme de degré 2 est positif. Le signe est donc le suivant :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	0

On a donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty$$

On a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

Remarques :

- Attention ! La notation $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < -1}} \frac{1}{x^2 - 1}$ n'a aucun sens. Il suffit de connaître le signe de $(x^2 - 1)$ au voisinage de 1 pour conclure.
- Par un raisonnement analogue, on trouve :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{1}{x^2 - 1} = -\infty$$

3.4 Quotient de deux fonctions

3.4.1 Limite d'un quotient

On peut remarquer que $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$. On peut donc trouver la limite d'un quotient à l'aide des tableaux 2 et 3.

Les résultats sont résumés dans le tableau 4.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	F.I.	F.I.
				Il faut étudier le signe de g		règle des signes	

TABLE 4 – Limite d'un quotient

Exemples :

1. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x-2}{3x-1} = ?$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} x - 2 = -\frac{5}{3} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} 3x - 1 = 0 \end{array} \right\} \text{il faut étudier le signe de } 3x - 1$$

le signe est résumé dans le tableau suivant :

x	\$-\infty\$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$3x - 1$	-	0	+

. Par suite, comme la limite du numérateur est négative, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x < \frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{3}}} \frac{x-2}{3x-1} = -\infty$$

On a une asymptote verticale d'équation $x = \frac{1}{3}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = ?$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 3 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0 \text{ et } \sqrt{x} > 0 \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}} = -\infty$$

On a une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-3}{\sqrt{x}} = ?$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array} \right\} \text{On a une forme indéterminée}$$

De plus :

$$\frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}} = \frac{x^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = \frac{x(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = x\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0 \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{\sqrt{x}} = +\infty$$

3.4.2 Application : limite en l'infini d'une fonction rationnelle

Exemple :

$$h(x) = \frac{3x^2 - 5x + 1}{x + 2}$$

On a une forme indéterminée lorsque x tend vers $+\infty$.

Si $x \neq 0$:

$$h(x) = \frac{x^2 \left(3 - \frac{5x}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{x \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 3 \end{array} \right\} \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(3 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

Remarque : On peut remarquer que la limite est la même que celle du quotient des monômes de plus haut degré. Ce résultat se généralise.

Propriété :

En $+\infty$ ou en $-\infty$, une fonction **rationnelle** a la **même limite** que le **quotient des monômes de plus haut degré** de son numérateur et de son dénominateur.