

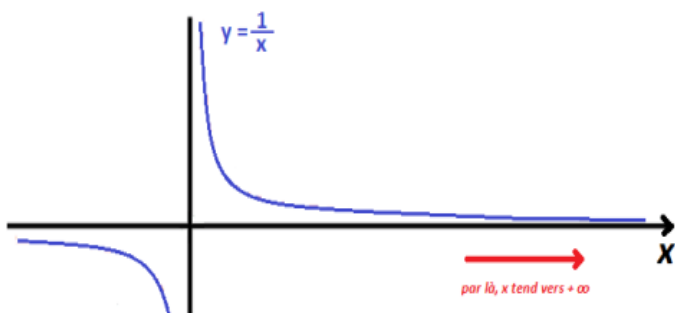
## LIMITE D'UNE FONCTION

### 1) Introduction et activités

La limite d'une fonction, c'est en gros « vers quoi tend » la fonction.

Le plus simple est de prendre un exemple : la

fonction inverse :  $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$



On voit bien que quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure sans jamais la toucher. et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose. on note cette limite de la

façon suivante :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

Et on prononce cela « limite quand  $x$  tend vers plus l'infini de  $\frac{1}{x}$  est égal 0 plus ».

Pour l'instant retiens juste la notation et cette notion de « tendre vers », de toute façon au fur et à mesure de la leçon tu assimileras de mieux en mieux le concept de limite avec les exemples.

### 2) LIMITE FINIE EN $a$ .

**Propriété :**  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{R}^*$

Les fonctions :  $x \mapsto x^2$  ;  $x \mapsto x^3$

;  $x \mapsto x^n$  ;  $x \mapsto k|x|$  ;  $x \mapsto k\sqrt[n]{|x|}$  ;  $x \mapsto k|x|^n$

Tendent vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

**Exemple :** Calculer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^8$  2)  $\lim_{x \rightarrow 0} 5|x|$  3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}|x|^3$

**Solutions:** 1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^8 = 0$  2)  $\lim_{x \rightarrow 0} 5|x| = 0$  3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}|x|^3 = 0$

**Propriété :** Si  $P$  est une fonction polynôme alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Une fonction polynôme  $P$  c'est une fonction qui s'écrit de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow -1} 5x^2 + 2x - 8 = 5 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 8 = -5$

**Définition :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers  $l$

quand  $x$  tend vers  $a$  si :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - l = 0$ .

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

**Exemple1 :** 1) monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2) a) monter que :  $\forall x \in ]-1; 1[ : |x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Solution :** 1)  $x \in \mathbb{R}^* : \left| \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq 1$

donc  $\left| x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$

2) a) on a :  $|x^2 + 5x| = |x(x+5)| = |x||x+5|$

Et puisque :  $x \in ]-1; 1[$  alors :  $4 < x+5 < 6$

alors :  $|x+5| < 6$  donc  $|x^2 + 5x| \leq 6|x|$

b) puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0} 6|x| = 0$  alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$

**Exemple2 :** monter que :  $\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$

**Solution :**  $x \in \mathbb{R}^* : \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$  donc :

$|f(x) - 2| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2$  et on a  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$



**Exemple3 :** monter que:  $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$

**Solution :**  $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$|f(x) - 3| = |\sqrt{2x+1} - 3| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1} + 3}$$

et on a  $\sqrt{2x+1} + 3 \geq 3$  donc :  $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque :  $\lim_{x \rightarrow 4} |x-4| = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

**Exemple4 :** On se propose d'étudier la limite de

la fonction :  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$  en 0.

On remarque que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*) :$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2} - 1)(\sqrt{1+x^2} + 1)}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{1+x^2 - 1}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} \text{ D'autre part :}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) (|f(x)| \leq |x|)$  et puisque  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**Propriété :** Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$

on a :  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

**Remarque :**

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -l$$

**Propriété :** Si  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  alors cette limite est **unique**.

**Exercice :** Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2x + 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 3x - 4} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

**Solutions :** 1)  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2x + 1 = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1 = 17$

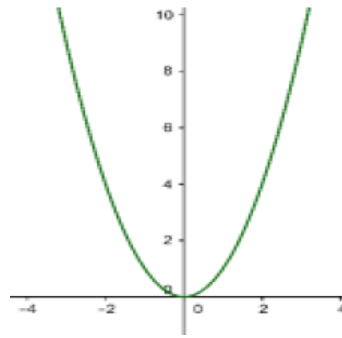
$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 3x - 4} = \frac{3 \times 1^2 - 1}{2 \times 1^3 + 3 \times 1 - 4} = \frac{2}{1} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\sqrt{4 \times 2 + 1} + 3}{2^2 + 3 \times 2 + 2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

**3) Limite infinies en  $\pm\infty$**

**Activité :** Considérons la fonction  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto x^2$

La courbe représentative de  $f$  est la parabole de centre  $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

$x$	1	$10^3$	$10^5$	$10^6$	$10^{12}$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

On voit bien que quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la fonction « tend » vers  $+\infty$ , c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus grand

on écrit :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2- Compléter le tableau suivant :

$x$	$-10^{12}$	$-10^5$	$-10^3$	$-10$	$-2$
$f(x)$					

Que remarquer-vous ?

On voit bien que quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , la fonction « tend » vers  $+\infty$ , c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus grand

on écrit :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

**Propriété :** Les fonctions :

$$x \mapsto x^2; x \mapsto x^n \ (n \in \mathbb{N}^*); x \mapsto \sqrt{x}; x \mapsto |x|$$

Tendent vers  $+\infty$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$

**Exercice :** Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2014} \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9$$

**Solutions :**

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 = +\infty \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2014} = +\infty \text{ car 2014 pair}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9 = +\infty \text{ car 2014 impair}$$

**4) Limite finie en  $\pm\infty$**

**Activité :** Soit la fonction :  $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

1) Compléter le tableau suivant :

$x$	1	$10^3$	$10^5$	$10^6$	$10^{12}$
$f(x)$					



On remarque que quand  $x$  tend vers  $+\infty$ , la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure. On note cette limite de la façon

$$\text{suivante : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

2) Compléter le tableau suivant :

$x$	$-10^{12}$	$-10^6$	$-10^5$	$-10$	$-1$
$f(x)$					

On remarque que quand  $x$  tend vers  $-\infty$ , la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur inférieure. On note cette limite de la façon

$$\text{suivante : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

**Propriétés :** les fonctions  $x \mapsto \frac{k}{x}$ ;  $x \mapsto \frac{k}{x^2}$ ;

$$x \mapsto \frac{k}{x^n} : x \mapsto \frac{k}{|x|}; x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}; x \mapsto \frac{k}{|x|^n} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

et  $k \in \mathbb{R}^*$  Tendent vers 0 quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

**Exemple :** Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^7} \quad 4) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^5}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^{2021}} \quad 6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x^{2023}}$$

$$\text{Solution : } 1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+ \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = 0^-$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^7} = 0^- \quad 4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^5} = 0^+ \quad 5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^{2021}} = 0^+$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x^{2023}} = 0^+$$

### 5) Limite infinies en un point

**Activité :** Soit la fonction :  $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$

1) Compléter le tableau suivant :

$x$	$10^{12}$	$10^6$	$10^2$	$10$	$1$
$f(x)$					

On remarque que quand  $x$  tend vers 0 par valeur supérieure la fonction  $f$  « tend » vers  $+\infty$  c'est-à-dire qu'elle devient de plus en plus grand. On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

2) Compléter le tableau suivant :

$x$	$-1$	$-10$	$-10^2$	$-10^6$	$-10^{12}$
$f(x)$					

On remarque que quand  $x$  tend vers 0 par valeur inférieure la fonction  $f$  « tend » vers  $-\infty$  c'est-à-dire qu'elle devient de plus en plus petit. On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

**Exemple :** Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Solution : } 1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} = +\infty \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty \quad 6) \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 + 7 + \infty = +\infty$$

### 6) LIMITE A DROITE, LIMITE A GAUCHE.

**Exemple :** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{|x-1|x}{x^2-1}$

Déterminer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$\text{Si : } x > 1 : f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si : } x < 1 : f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$$

Remarque :  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

**Théorème :** Une fonction  $f$  admet une limite  $l$  en  $a$  si et seulement si elle admet une limite à droite de  $a$  égale à sa limite à gauche de  $a$  égale à  $l$ .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$$

**Exemple :** Soit la fonction  $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de  $f$  en  $x_0 = -1$



**Solution :** Déterminons  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  ?

Solution :  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Si :  $-1 < x < 1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} -\frac{x+1}{x-1} = 0$

Si :  $x < -1$  :  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$

Donc :  $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} \frac{x+1}{x-1} = 0$

donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$  donc :  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

**Exercice :** Soit la fonction  $g$  définie par :

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto 2x^2 - x + 3$  si  $x \geq 1$

$x \mapsto -x^2 + x + \alpha$  si  $x < 1$

Déterminer  $\alpha$  pour que la fonction  $g$  admet une limite en 1.

## 7) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

### 1) Opérations sur les limites finies.

**Propriété :** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$  on a :

$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l'$  et  $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l'$  et

$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l|$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'}$  si  $l' \neq 0$

et  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$  si  $l' \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f}(x) = \sqrt{l}$  si  $l \geq 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel  $a$ .

**Exemple :**  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = 3$

### 2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises

#### a) Limite de la somme

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si  $x$  tend vers :

$a+$  ;  $a-$  ;  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Formes indéterminées :** Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

**Exemple1 :**  $f(x) = 2 + x^2$ ,  $g(x) = 5 - x^2$  on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = -7$

2)  $f(x) = 2 + x^2$ ,  $g(x) = 5 - x$  on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

**Exemple2 :** déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$

Donc Formes indéterminée :  $+\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$

puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$

#### b) Limites des produits

$\lim f$	$\ell$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

#### c) Limites des inverses

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

#### 4) Limites des quotients

$\lim f$	$\ell$	$\ell$	$\ell \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\ell$	0	$\pm \infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$	?	?

**Exemple3 :** déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

**Solution :** on a :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 = 2$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Donc :  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$



**Exemple4 :** déterminer :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

**Solution :** 1) on a :  $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$  et

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 1 = 2 \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$2) \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = -\infty$$

**Exemple5 :** On veut déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 4$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	$+$	$0$	$-$	$0$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$$

**Remarque :** 1) Eviter d'écrire ces expressions

qui n'ont pas de sens mathématique :  $\frac{?}{0^+}$  et  $\frac{?}{0^-}$

2) Ne pas utiliser  $+\infty$  ou  $-\infty$  dans les opérations dans  $\mathbb{R}$  ( $+\infty$  et  $-\infty$  ne sont pas des réels)

**Exercices :** Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

**3) Limites d'une fonction polynôme en  $\pm\infty$**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Soit  $f$  une fonction polynôme de degré  $n$  tel que :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

avec  $a_n \neq 0$  On a :

$$f(x) = a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)$$

$$\text{puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 = 1$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_nx^n$$

Même chose si  $x$  tend vers  $-\infty$

**Propriété :** La limite d'une fonction polynôme en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite de son plus grand terme

En  $+\infty$  ( $-\infty$ )

**Exemple :**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

**4) Limites d'une fonction rationnelle en  $\pm\infty$**

Une fonction rationnelle est le rapport de deux

$$\text{fonctions polynômes : } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \text{ avec } a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \text{ avec } b_m \neq 0$$

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

$$h(x) = \frac{a_nx^n \left( \frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1 \right)}{b_mx^m \left( \frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1 \right)}$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1}{\frac{b_0}{b_mx^m} + \frac{b_1}{b_mx^{m-1}} + \frac{b_2}{b_mx^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_mx} + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_nx^n}{b_mx^m}$$

Même chose si  $x$  tend vers  $-\infty$



**Propriété :** La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ( $-\infty$ ) est la limite du rapport des termes de plus grand degré en  $+\infty$  ( $-\infty$ )

**Exemples :**

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

**Remarque :** La propriété précédente n'est vraie que si  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$

### 8) Limites des fonctions trigonométriques.

**Propriété :** Soit  $a$  un réel on a :

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$3) \text{si } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

**Propriété :** Soit  $a \in \mathbb{R}^*$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

**Exemples :** Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$$

**Solution :** 1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} \quad \text{directement on trouve une}$$

formes indéterminée :  $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cosh h}{\frac{h^2}{2}} \right) = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

(On pose  $\sqrt{x} = h$ )

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$$

On montre que :  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right)}{x - \frac{\pi}{6}}$$

On pose  $x - \frac{\pi}{6} = h$  donc  $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\text{Donc : } = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \times 1 = 2$$

**Exercice1 :** Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

$$1) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$2) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

$$3) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de  $k$

**Solution :**

$$1) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{et} \quad f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ? \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} g(x) ? \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$





$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} + 1 = \sqrt{3} + 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2 + 1 = -17 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+ \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2} = +\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$4) k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ donc : } D_k = ]-\infty; 0[ \cup ]0; 2[ \cup ]2; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$$

Etude du signe de :  $x^2 - 2x$

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$x(x-2)$	$+$	$0$	$-$	$+$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} -3x+1 = -5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2-2x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2-2x = 0^-$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$$

**Exercice2** : calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Solution : } 1) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x}-2 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} x^2+3x-10 = 0$$

on trouve une formes indéterminée : " $\frac{0}{0}$ "

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x^2+3x-10)(\sqrt{2x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-4)}{(\sqrt{2x}+2)} \times \frac{1}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2x}+2)} \times \frac{1}{(x+5)} = \frac{2}{14}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1} ?$$

$$\text{On a : } x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$\text{Et } 2x^3+3x^2-4x-1 = (x-1)(2x^2+5x+1)$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1} = \frac{8}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x ?$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2+x = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

on trouve une formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}+x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \text{ On pose } x - \frac{\pi}{4} = h \text{ donc } x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right)}{h}$$

$$\text{or : } \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$



### 9) Limites et ordres.

**Propriété :** Si sur un intervalle pointé de centre  $a$  on a :  $|f(x) - l| \leq u(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de  $a$  ou  $+\infty$  ou  $-\infty$ .)

**Propriété :** 1) soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a - r; a - r[ - \{a\}$

avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$

Si  $f$  admet une limite en  $a$  et  $f$  positif sur  $I$  alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$$

2) soit  $f$  est une fonction définie sur un intervalle de la forme  $I = ]a - r; a - r[ - \{a\}$

avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $r > 0$

Si  $f$  admet une limite en  $a$  et  $g$  admet une limite

en  $a$  et  $f \leq g$  sur  $I$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

3) si on a :  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$  et si  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

et  $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$  alors  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si  $x$  tend vers  $a$  à droite, ou  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de  $a$ .)

**Propriété :** 1) Si sur un intervalle de la forme

$]a, a + r[$  on a :  $u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = +\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = +\infty$

2) Si sur un intervalle de la forme  $]a, a + r[$  on a :

$u(x) \leq v(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = -\infty$

alors :  $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si  $x$  tend vers  $a$  à gauche, ou  $+\infty$  ou  $-\infty$  en tenant compte des conditions pour chaque cas.

**Exemple1:** Soit la fonction :  $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  on a  $3x^2 \leq 3x^2 + 5x + 1$  et

puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

**Exemple2 :** Soit la fonction :

$f : x \mapsto (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x}$  déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^*$  on a  $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$  et

$x^2 + x^4 \geq 0$  donc  $-x^2 - x^4 \leq (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \leq x^2 + x^4$

et puisque :

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 - x^4 = 0$  alors :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

**Exemple3 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}$  on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :

$x - 2 \leq f(x) \leq x$  et puisque :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

**Exemple4 :** Soit la fonction :  $f : x \mapsto \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}}$

déterminer :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**Solution :**  $\forall x \in \mathbb{R}^+$  on a  $1 + \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$  et

$0 \leq 1 + \sin x \leq 2$  donc  $\left| \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  donc

$|f(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

**Exercice3 :** Déterminer les limites suivantes :

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$  2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$  3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

**Solution :** 1) on pose :  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq 1$  donc :  $|f(x)| \leq x^2$  et on a

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3}$  ? on pose :  $f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$





$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |\cos x| \leq 1$  donc :  $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$  et on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$  ? on pose :  $f(x) = \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -1 \leq \cos x \leq 1$  et  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc :  $0 \leq \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \leq 2$  donc  $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$  ? on pose :  $f(x) = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq \sqrt{x^4} \quad \text{cad} \quad 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq x^2$

donc :  $\frac{1}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2}$  donc :  $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$  Alors :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

