

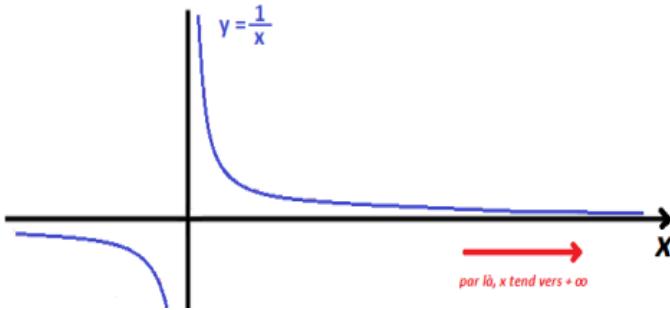
LIMITE D'UNE FONCTION

1) Introduction et activités

La limite d'une fonction, c'est en gros « vers quoi tend » la fonction.

Le plus simple est de prendre un exemple : la

fonction inverse : $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$



On voit bien que quand x tend vers $+\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure sans jamais la toucher. et bien on appelle cela une limite, puisque la fonction « tend vers » quelque chose. on note cette limite de la

façon suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

Et on prononce cela « limite quand x tend vers plus l'infini de $\frac{1}{x}$ est égal 0 plus».

Pour l'instant retiens juste la notation et cette notion de « tendre vers », de toute façon au fur et à mesure de la leçon tu assimileras de mieux en mieux le concept de limite avec les exemples.

2) LIMITE FINIE EN a.

Propriété : $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$

Les fonctions : $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$

; $x \mapsto x^n$; $x \mapsto k|x|$; $x \mapsto k\sqrt[n]{|x|}$; $x \mapsto k|x|^n$

Tendent vers 0 quand x rend vers 0.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^8 \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} 5|x| \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}|x|^3$$

$$\text{Solutions:} 1) \lim_{x \rightarrow 0} x^8 = 0 \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} 5|x| = 0 \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}|x|^3 = 0$$

Propriété : Si P est une fonction polynôme alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

Une fonction polynôme P c'est

une fonction qui s'écrit de la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$\text{Exemple : } \lim_{x \rightarrow -1} 5x^2 + 2x - 8 = 5 \times (-1)^2 + 2 \times (-1) - 8 = -5$$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a et l un réel. On dit que la fonction f tend vers l

quand x tend vers a si : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) - l = 0$.

Propriété: Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$\text{Exemple1 :} 1) \text{montrer que : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

$$2) \text{a) montrer que : } \forall x \in]-1; 1[: |x^2 + 5x| \leq 6|x|$$

$$\text{b) Calculer } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$$

$$\text{Solution :} 1) x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq 1$$

$$\text{donc } \left| x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) \right| \leq x^2 \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 0$$

$$2) \text{a) on a : } |x^2 + 5x| = |x(x+5)| = |x||x+5|$$

Et puisque : $x \in]-1; 1[$ alors : $4 < x+5 < 6$

$$\text{alors : } |x+5| < 6 \text{ donc } |x^2 + 5x| \leq 6|x|$$

$$\text{b) puisque : } \lim_{x \rightarrow 0} 6|x| = 0 \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 5x$$

$$\text{Exemple2 : montrer que: } \lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 2$$

$$\text{Solution :} x \in \mathbb{R}^* \quad \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1 \text{ donc :}$$

$$\left| f(x) - 2 \right| = x^2 \left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

Exemple3 : montrer que: $\lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x+1} = 3$

Solution : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$

$$|f(x) - 3| = |\sqrt{2x+1} - 3| = \frac{2|x-4|}{\sqrt{2x+1}+3}$$

et on a $\sqrt{2x+1}+3 \geq 3$ donc: $|f(x) - 3| \leq \frac{2}{3}|x-4|$

et puisque: $\lim_{x \rightarrow 4} |x-4| = 0$ Alors: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$

Exemple4 : On se propose d'étudier la limite de

la fonction: $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ en 0.

On remarque que: ($\forall x \in \mathbb{R}^*$):

$$f(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1+x^2-1}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}$$

(on a multiplié par le conjugué)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1} \text{ D'autre part:}$$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) (|f(x)| \leq |x|)$ et puisque $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle pointé de centre a

$$\text{on a: } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Remarque :

$$\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -l$$

Propriété : Si f admet une limite l en a alors cette limite est **unique**.

Exercice : Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2x + 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 3x - 4} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} + 3}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\text{Solutions : } 1) \lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 2x + 1 = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1 = 17$$

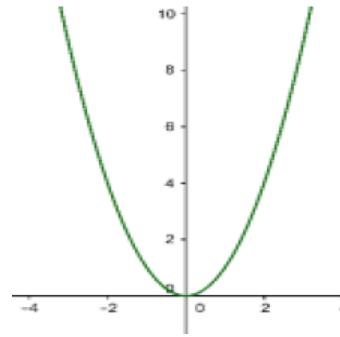
$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 3x - 4} = \frac{3 \times 1^2 - 1}{2 \times 1^3 + 3 \times 1 - 4} = \frac{2}{1} = 2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\sqrt{4 \times 2 + 1} + 3}{2^2 + 3 \times 2 + 2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

3) Limite infinies en $\pm\infty$

Activité : Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

La courbe représentative de f est la parabole de centre $O(0,0)$



1- Compléter le tableau suivant :

x	1	10^3	10^5	10^6	10^{12}
$f(x)$					

Que remarquez-vous ?

On voit bien que quand x tend vers $+\infty$, la fonction « tend » vers $+\infty$, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus grand

on écrit: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2- Compléter le tableau suivant :

x	-10^{12}	-10^5	-10^3	-10	-2
$f(x)$					

Que remarquez-vous ?

On voit bien que quand x tend vers $-\infty$, la fonction « tend » vers $+\infty$, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus grand

on écrit: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Propriété : Les fonctions :

$$x \mapsto x^2; x \mapsto x^n (n \in \mathbb{N}^*); x \mapsto \sqrt{x}; x \mapsto |x|$$

Tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$

Exercice : Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2014} \quad 3) \lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9$$

Solutions :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 = +\infty \quad 2) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^{2014} = +\infty \text{ car 2014 pair}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} -7x^9 = +\infty \text{ car 2014 impair}$$

4) Limite finie en $\pm\infty$

Activité : Soit la fonction: $f: x \rightarrow \frac{1}{x}$

1) Compléter le tableau suivant :

x	1	10^3	10^5	10^6	10^{12}
$f(x)$					



On remarque que quand x tend vers $+\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur supérieure. On note cette limite de la façon suivante : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$

2) Compléter le tableau suivant :

x	-10^{12}	-10^6	-10^5	-10	-1
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers $-\infty$, la fonction « tend » vers 0, c'est-à-dire qu'elle se rapproche de plus en plus de 0 par valeur inférieure. On note cette limite de la façon suivante : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

Propriétés : les fonctions $x \mapsto \frac{k}{x}$; $x \mapsto \frac{k}{x^2}$;

$x \mapsto \frac{k}{x^n}$; $x \mapsto \frac{k}{|x|}$; $x \mapsto \frac{k}{\sqrt{|x|}}$; $x \mapsto \frac{k}{|x|^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$

et $k \in \mathbb{R}^*$ Tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3}$ 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5}$ 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^7}$ 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{x^5}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^{2021}}$ 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x^{2023}}$

Solution : 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$ 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^5} = 0^-$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^7} = 0^-$ 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{x^5} = 0^+$ 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x^{2021}} = 0^+$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5}{x^{2023}} = 0^+$

5) Limite infinies en un point

Activité : Soit la fonction : $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$

1) Compléter le tableau suivant :

x	10^{12}	10^6	10^2	10	1
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers 0 par valeur supérieure la fonction f « tend » vers $+\infty$ c'est-à-dire qu'elle devient de plus en plus grande. On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

2) Compléter le tableau suivant :

x	-1	-10	-10^2	-10^6	-10^{12}
$f(x)$					

On remarque que quand x tend vers 0 par valeur inférieure la fonction f « tend » vers $-\infty$ c'est-à-dire qu'elle devient de plus en plus petite. On note cette limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5}$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4}$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Solution : 1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-5}{x^3} = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9}{x^5} = +\infty$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-12}{x^4} = -\infty$

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}} = -\infty$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 + 7 + \infty = +\infty$

6) Limite à droite, Limite à gauche.

Exemple : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{|x-1|}{x^2-1}$

Déterminer $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

Si : $x > 1$: $f(x) = \frac{(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}$

Si : $x < 1$: $f(x) = \frac{-(x-1)x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{x}{x+1}$

Donc : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} -\frac{x}{x+1} = -\frac{1}{2}$

Remarque : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$

Théorème : Une fonction f admet une limite l en a si et seulement si elle admet une limite à droite de a égale à sa limite à gauche de a égale à l .

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = l \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = l$$

Exemple : Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{(x+1)^2}{|x^2-1|}$

Etudier la limite de f en $x_0 = -1$



Solution : Déterminons $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x)$?

Solution : $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{Si : } -1 < x < 1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = -\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} -\frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{Si : } x < -1 : f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1||x-1|} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x-1} = 0$$

$$\text{donc : } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

Exercice : Soit la fonction g définie par :

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 - x + 3 \text{ si } x \geq 1$$

$$x \mapsto -x^2 + x + \alpha \text{ si } x < 1$$

Déterminer α pour que la fonction g admet une limite en 1.

7) OPERATIONS SUR LES LIMITES.

1) Opérations sur les limites finies.

Propriété : Soient f et g deux fonctions tels que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l' \text{ on a :}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f+g)(x) = l + l' \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l' \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} |f|(x) = |l| \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g} \right)(x) = \frac{1}{l'} \text{ si } l' \neq 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{l}{l'} \text{ si } l' \neq 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f}(x) = \sqrt{l} \text{ si } l > 0$$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel a .

$$\text{Exemple : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + 1}{2x - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises

a) Limite de la somme

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim f+g$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme ind

Ces propriétés sont vraies si x tend vers :

$a+$; $a-$; $+\infty$ ou $-\infty$

Formes indéterminées : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

Exemple1 : 1) $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x^2$ on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = -7$$

2) $f(x) = 2 + x^2$, $g(x) = 5 - x$ on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2} \right) = +\infty$$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

Exemple2 : déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x}$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$$

Donc Formes indéterminée : " $+\infty - \infty$ "

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x\sqrt{x}} \right)$$

$$\text{puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \sqrt{x} = +\infty$$

b) Limites des produits

$\lim f$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme ind	Forme ind	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

c) Limites des inverses

$\lim f$	$\ell \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

4) Limites des quotients

$\lim f$	ℓ	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$\pm \infty$	0	ℓ	0	$\pm \infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm \infty$	$\pm \infty$?	?

Exemple3 : déterminer : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2}$

Solution : on a : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x + 2 + \frac{1}{x^2} = +\infty$$



Exemple4 : déterminer :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4$$

Solution : 1) on a : $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0^+$ et

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^3 + 1 = 2 \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$$2) \text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{1 + \frac{1}{x^3}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}$$

$$\text{et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x^3} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1 \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{(x-1)^2} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{2}{x^3}\right)$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0 \text{ et}$$

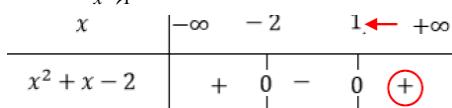
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = -\infty$$

Exemple5 : On veut déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} 3x+1 = 4$$

$$\text{on a : } \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + x - 2 = 0^+$$



$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2 + x - 2} = +\infty$$

Remarque : 1) Eviter d'écrire ces expressions

qui n'ont pas de sens mathématique : $\frac{?}{0^+}$ et $\frac{?}{0^-}$

2) Ne pas utiliser $+\infty$ ou $-\infty$ dans les opérations dans \mathbb{R} ($+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des réels)

Exercices : Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

3) Limites d'une fonction polynôme en $\pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Soit f une fonction polynôme de degré n tel que $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

avec $a_n \neq 0$ On a :

$$f(x) = a_n x^n \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1 \right)$$

$$\text{puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1 = 1$$

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

Même chose si x tend vers $-\infty$

Propriété : La limite d'une fonction polynôme en $+\infty$ ($-\infty$) est la limite de son plus grand terme

En $+\infty$ ($-\infty$)

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 + x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = +\infty$$

4) Limites d'une fonction rationnelle en $\pm\infty$

Une fonction rationnelle est le rapport de deux

$$\text{fonctions polynômes : } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \text{ avec } a_n \neq 0$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m \text{ avec } b_m \neq 0$$

$$h(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$$

$$h(x) = \frac{a_n x^n \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1 \right)}{b_m x^m \left(\frac{b_0}{b_m x^m} + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_2}{b_m x^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + 1 \right)}$$

$$\text{et puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1}{\frac{b_0}{b_m x^m} + \frac{b_1}{b_m x^{m-1}} + \frac{b_2}{b_m x^{m-2}} + \dots + \frac{b_{m-1}}{b_m x} + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

Même chose si x tend vers $-\infty$



Propriété : La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty$ ($-\infty$) est la limite du rapport des termes de plus grand degré en $+\infty$ ($-\infty$)

Exemples :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+5x^2-7x^4}{x-10x^2+14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^4}{14x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+8x^2-2x^5}{x^2+2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^5}{2x^6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = 0$$

Remarque : La propriété précédente n'est vraie que si x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$

8) Limites des fonctions trigonométriques.

Propriété : Soit a un réel on a :

$$1) \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$2) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$3) \text{ si } a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}^*$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Exemples : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x}-1}{x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$$

Solution : 1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} = 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x}-1}{x} \text{ directement on trouve une}$$

formes indéterminée : $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos \sqrt{x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left(\frac{1-\cos \sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \right) = \lim_{h \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \left(\frac{1-\cosh h}{h^2} \right) = -\frac{1}{2} \times 1 = -\frac{1}{2}$$

(On pose $\sqrt{x} = h$)

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}}$$

On montre que : $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{x - \frac{\pi}{6}}$$

On pose $x - \frac{\pi}{6} = h$ donc $x \rightarrow \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$

$$\text{Donc : } = 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 2 \times 1 = 2$$

Exercice1 : Soient les fonctions tels que :

$$f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x) \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ et } h(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \sin x$$

$$1) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$2) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} g(x)$$

$$3) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 0} h(x)$$

4) Déterminer les limites aux bornes du domaine de définition de k

Solution :

$$1) \text{Déterminer : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ et } f(x) = \sqrt{2x+1}(-3x^2+x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x+1 = 5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} -3x^2+x = -10$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5} \times (-10) = -10\sqrt{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x+1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$$\text{Et on a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2+x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3x^2 = -\infty$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\bullet \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) ? \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}+1 = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\bullet \quad 2) \lim_{x \rightarrow 3} g(x) ? \text{ et } g(x) = \frac{-2x^2+1}{(x-3)^2}(\sqrt{x}+1)$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x+1} = \sqrt{3} + 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 3} -2x^2 + 1 = -17 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2 = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} h(x) ?$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et puisque } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1 = 1 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^2} = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$$

$$4) k(x) = \frac{-3x+1}{x(x-2)} \text{ donc } D_k =]-\infty; 0[\cup]0; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x+1}{x^2-2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} -3x+1 = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^2-2x = 0$$

Etude du signe de : $x^2 - 2x$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x(x-2)$	+	0	-	0

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x = 0^- \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0^+$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} k(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} -3x+1 = -5 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x = 0^+ \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x = 0^-$$

$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} k(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^-} k(x) = +\infty$$

Exercice 2 : calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x \quad 4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Solution : 1) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} - 2 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\text{on trouve une formes indéterminée : } \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{x^2+3x-10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)}{(x^2+3x-10)(\sqrt{2x}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x-4)}{(\sqrt{2x}+2)} \times \frac{1}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{(\sqrt{2x}+2)} \times \frac{1}{(x+5)} = \frac{2}{14}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1} ?$$

$$\text{On a : } x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

$$\text{Et } 2x^3+3x^2-4x-1 = (x-1)(2x^2+5x+1)$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+5x+1}{x^2+x+1} = \frac{8}{3}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x ?$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$$

$$\text{Et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

on trouve une formes indéterminée : "+∞ - ∞"

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - x)(\sqrt{x^2+x} + x)}{(\sqrt{x^2+x} + x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)+x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)+x}} \text{ or } x \rightarrow +\infty \text{ donc } |x| = x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}\right)+1}} = \frac{1}{2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} \text{ On pose } x - \frac{\pi}{4} = h \text{ donc } x \rightarrow \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow h \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) - 1}{h}$$

$$\text{or : } \tan\left(h + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan h + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan h \times \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\tan h + 1}{1 - \tan h}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{1 - \tan h} \times \frac{\tan h}{h} = \frac{2}{1} \times 1 = 2$$



9) Limites et ordres.

Propriété : Si sur un intervalle pointé de centre a on a : $|f(x) - l| \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche et adroites de a ou $+\infty$ ou $-\infty$.)

Propriété : 1) soit f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a-r; a+r[- \{a\}$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$

Si f admet une limite en a et f positif sur I alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$$

2) soit f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a-r; a+r[- \{a\}$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$

Si f admet une limite en a et g admet une limite en a et $f \leq g$ sur I alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

3) si on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

et $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

Les propriétés précédentes sont vraies si x tend vers a à droite, ou a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

(On peut citer les mêmes propriétés à gauche de a .)

Propriété : 1) Si sur un intervalle de la forme

$]a, a+r[$ on a : $u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = +\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = +\infty$

2) Si sur un intervalle de la forme $]a, a+r[$ on a :

$u(x) \leq v(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} v(x) = -\infty$

alors : $\lim_{x \rightarrow a^+} u(x) = -\infty$

La propriété précédente est vraie si x tend vers a à gauche, ou $+\infty$ ou $-\infty$ en tenant compte des conditions pour chaque cas.

Exemple1: Soit la fonction : $f : x \mapsto 3x^2 + 5x + 1$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ on a $3x^2 \leq 3x^2 + 5x + 1$ et et

puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple2 : Soit la fonction :

$$f : x \mapsto (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \quad \text{déterminer : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ on a $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ et

$$x^2 + x^4 \geq 0 \text{ donc } -x^2 - x^4 \leq (x^2 + x^4) \sin \frac{1}{x} \leq x^2 + x^4$$

et puisque :

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 - x^4 = 0 \text{ alors :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Exemple3 : Soit la fonction : $f : x \mapsto x + \sin x - 1$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc :

$$x - 2 \leq f(x) \leq x \text{ et puisque :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \text{ alors : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Exemple4 : Soit la fonction : $f : x \mapsto \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}}$

déterminer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Solution : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $1 + \sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ et

$$0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \text{ donc } \left| \frac{1 + \sin x}{1 + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ donc}$$

$$\left| f(x) \right| \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \text{ et on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \text{ donc :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Exercice3 : Déterminer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3} \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2 (2 + \cos x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$$

Solution : 1) on pose : $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq 1 \text{ donc : } |f(x)| \leq x^2 \text{ et on a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \text{ Alors : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x^3} ? \text{ on pose : } f(x) = \frac{\cos x}{x^3}$$



$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad |\cos x| \leq 1$ donc : $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|^3}$ et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|^3} = 0$ Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$? on pose : $f(x) = \frac{1 + \sin x}{x^2(2 + \cos x)}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad -1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ donc : $0 \leq \frac{1 + \sin x}{2 + \cos x} \leq 2$ donc $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2}$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$ Alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$? on pose : $f(x) = 1 + \frac{x}{2 + \sqrt{x^4 + 1}}$

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad 2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq \sqrt{x^4}$ cad $2 + \sqrt{x^4 + 1} \geq x^2$

donc : $\frac{1}{2 + \sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2}$ donc : $|f(x) - 1| \leq \frac{1}{|x|}$

Et puisque : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$ Alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien

