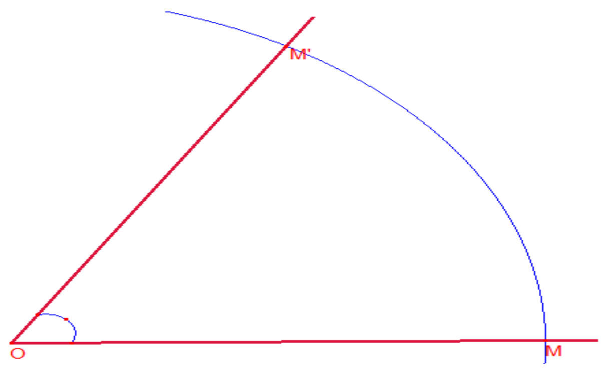
Chapitre 8
La rotation dans le plan

I. Rotation

1- Rotation

Dé inition 1. Soit O un point du plan. La rotation r de centre O et d'angle α transforme un point M en un point image M' tel que :

$$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha[2\pi] \end{cases}$$



On note parfois $r_{(O;\alpha)}$ la rotation de centre O et d'angle α ou r_o et on précise l'angle de rotation. D'après le figure ci-dessus $r_{(O;\alpha)}(M) = M'$

Remarques 1.
1) L'image du centre O est O (on dit que le point O est invariant),
2) Les rotations d'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sont appelées quarts de tour direct,
3) Les rotations d'angle $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ sont appelées quarts de tour indirect,
4) La rotation de centre O et d'angle $\alpha = \pi$ est la symétrie centrale par rapport à O.

Exemple 1. ABCD est un carré de sens direct de centre O. Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $^{\pi}{}_2$ et r_O une rotation de centre O et d'angle α.

1) Déterminer $r_A(A)$; $r_A(B)$; $r_A(D)$,
2) Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = B$? Comment choisir α pour avoir $r_O(A) = C$?

2- Formule Analytique d'une Rotation

Soit Ω un point du plan $\mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors la rotation d'angle θ et de centre Ω :

$$\begin{aligned} R : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ M &\longmapsto M' \end{aligned}$$

tels que :

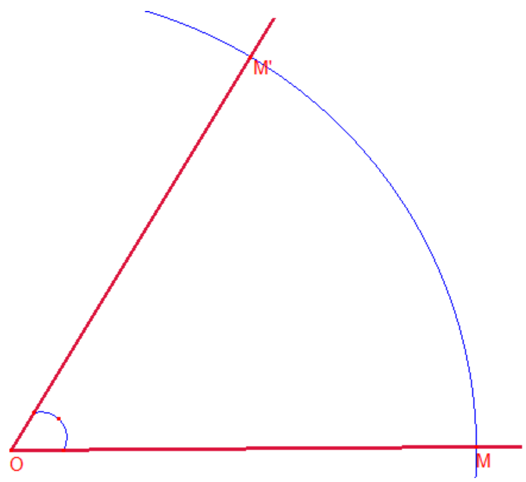
$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

On a :

$$R(M) = M' \Longleftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta[2\pi]. \end{cases}$$

3 - Rotation réciproque

Définition 1 Soit r une rotation de centre O et d'angle α. La rotation de centre O et d'angle $-\alpha$ est appelée rotation réciproque de r. On la note r^{-1}.



D'après le figure ci-dessus on a : $r_O^{-1}(M') = M$.

II - Caractérisations et Propriétés de Rotation

1- Les caracteristiques de Rotation

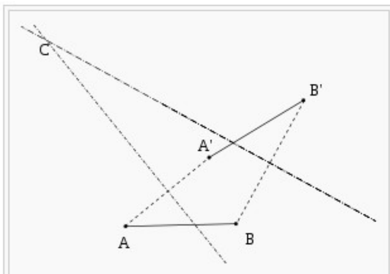
Une rotation peut donc être caractérisée par l'image de deux points : Soient A et B deux points distincts et A', B' deux points tels que $AB = A'B'$

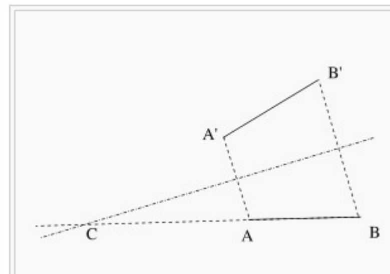
avec $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$, il existe une unique rotation r qui transforme A en A' et B en B'.

Cette rotation pour angle $\theta = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'B'})$, et pour centre l'intersection des médiatrices de [AA'] et $[BB']$ (si elles se coupent) ou bien le point d'intersection de (AB) et de la médiatrice de $[AA']$ (si les médiatrices ne sont pas sécantes).

Il n'est pas nécessaire de connaître le centre de la rotation pour construire l'image M' du point M (distinct de A) car celui-ci vérifie les deux conditions suivantes :

$$AM = A'M' \text{ et } (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{A'M'}) = \theta$$





2 -Propriétés de Rotation

Propriété 1. La rotation conserve :

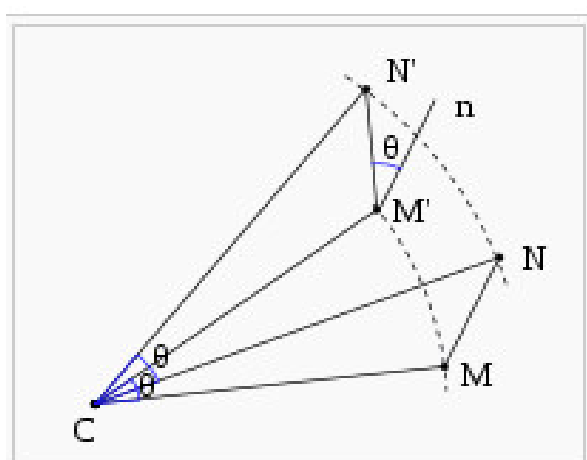
- les longueurs ;
- les angles (l'image d'un angle est un angle de même amplitude) ;
- les parallèles (les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles) ;
- les aires (l'image d'une figure est une figure de même aire).

Propriété 2. soient M et N deux points du plan distincts. On note M' et N' leurs images respectives par la rotation de centre c et d'angle θ. Alors :on

$$MN = M'N'$$

$$(\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{M'N'}) = \theta \ [2\Pi]$$

Démonstration.



Les triangles CMN et CM'N' sont isométriques de même orientation car

$$CM = CM'$$

$$CN = CN'$$

$$(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CN}) = (\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CM'})+(\overrightarrow{CM'};\overrightarrow{CN'})+(\overrightarrow{CN'};\overrightarrow{CN}) = \theta+(\overrightarrow{CM'};\overrightarrow{CN'})-\theta = (\overrightarrow{CM'};\overrightarrow{CN'})$$

Donc, en particulier :

$$MN = M'N'$$

$$(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{M'N'};\overrightarrow{M'C})$$

Une relation de Chasles sur les angles permet alors d'écrire :

$$(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN};\overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MC};\overrightarrow{M'C}) + (\overrightarrow{M'C};\overrightarrow{M'N'})$$

les deux angles extrêmes s'annulent et celui du milieu vaut θ donc

$$(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{M'N'}) = \theta$$

Propriété 3. une rotation transforme trois points alignés dans un ordre en trois points alignés dans le même ordre.

Démonstration. soient A,B et C trois points du plan alignés dans cet ordre et A' B' C' leurs image par la rotation de centre o et d'angle θ alors :

$$AB = A'B' \text{ et } BC = B'C' \text{ et } AC = A'C'$$

$$AB + BC = AC$$

c'est a dire :

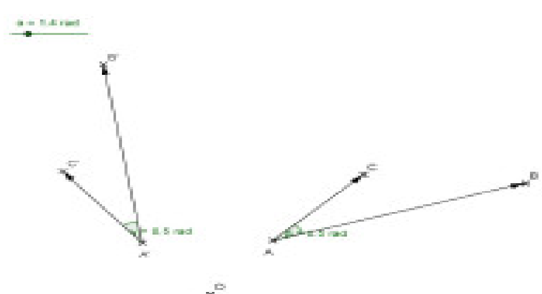
$$A'B' + B'C' = A'C'$$

les trois point A' et B' et C' sont aligné dans cet ordre .

Propriété 4. soient A, B et C trois points du plan distincts. On note A', B' et C' leurs images respectives par la rotation de centre O et d'angle α.

Alors :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})$$



Démonstration. on a :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) + (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}) + (\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{AC})$$

Or : $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{A'B'}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{A'C'};\overrightarrow{AC}) = -\alpha$
On obtient :

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'})$$

3 - Image d'une droite, d'un segment et d'un cerle par une rotation :

Propriété 1. Soit r une rotation. Soit A et B deux points tles que $A \neq B$.
Alors on a :

(i) l'image de la droite (AB) par la rotation r est la droite $(A^{'}B^{'})$ telle que $r(A) = A^{'}$ et $r(B) = B^{'}$.

(ii) L'image du segment $[AB]$ est le segment $[A^{'}B^{'}]$ telle que $r(A) = A^{'}$ et $r(B) = B^{'}$.

(iii) l'image du cercle $\mathcal{C}(O,R)$ par la rotation r est le cercle $\mathcal{C}(O^{'},R)$ telle que $r(O) = O^{'}$ (Voir figure ci-dessous).