

Formulaire de trigonométrie

1- Les angles associés :

Pour tout x réel, on a :

$$\cos(-x) = \cos(x) ; \cos(\pi + x) = -\cos(x) ; \cos(\pi - x) = -\cos(x) ; \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) ; \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) ; \sin(\pi + x) = -\sin(x) ; \sin(\pi - x) = \sin(x) ; \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) ; \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$$

Pour tout x appartenant à $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, on a : $\tan(-x) = -\tan(x)$; $\tan(\pi + x) = \tan(x)$; $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$

2- Les équations trigonométriques :

α est un réel quelconque : $\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow$ il existe un entier k tel que : $x = \alpha + 2k\pi$, ou $x = -\alpha + 2k\pi$
 $\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow$ il existe un entier k tel que : $x = \alpha + 2k\pi$, ou $x = \pi - \alpha + 2k\pi$

$\alpha \in D_{\tan}$: $\tan(x) = \tan(\alpha) \Leftrightarrow$ il existe un entier k tel que : $x = \alpha + k\pi$

3- Formules d'addition :

Pour tous réels a et b : $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$; $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
 $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$; $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Remarquons que, pour $b = -a$ la 1^{ère} formule donne : $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ « autorisés » : } \tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)} ; \tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout réel } a : \quad & \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) ; \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \\ & \cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a) ; \quad \sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a) \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout réel } a \text{ « autorisé » : } \cos(2a) = \frac{1 - \tan^2(a)}{1 + \tan^2(a)} ; \quad \sin(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 + \tan^2(a)} ; \quad \tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}$$

4- Formules de transformation :

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b : \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) ; \quad \sin(a)\sin(b) = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tous réels } p \text{ et } q : \quad & \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) ; \quad \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ & \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) ; \quad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Pour tous réels } p \text{ et } q \text{ autorisés : } \tan(p) + \tan(q) = \frac{\sin(p+q)}{\cos(p)\cos(q)} ; \quad \tan(p) - \tan(q) = \frac{\sin(p-q)}{\cos(p)\cos(q)}$$

Pour tous réels a et b non tous deux nuls, et pour tout réel x : $a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi)$,

$$\text{où } \varphi \text{ est un réel tel que : } \cos(\varphi) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin(\varphi) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} .$$