III Correction

1 Définition de suites

1. $u_1 = \dfrac{7 \times 1 - 2}{1+4} = 1,\ u_2 = 2,\ u_3 = \dfrac{19}{7}$ et $u_6 = 4$.
2. $u_1 = 2u_0 + 3 = 7,\ u_2 = 2u_1 + 3 = 17,\ u_3 = 37$, c'est une suite définie par récurrence, donc pour calculer u_6, je dois connaître u_4 et u_5.
   $u_4 = 2u_3 + 3 = 77,\ u_5 = 2u_4 + 3 = 157$ et enfin $u_6 = 2u_5 + 3 = 317$.
3. $u_1 = 2$ (1 n'est pas un nombre premier), $u_2 = 3,\ u_3 = 5$ et $u_6 = 13$.
4. $u_1 = 2,\ u_2 = 2 + 4 = 6,\ u_3 = 2 + 4 + 6 = 12$ et $u_6 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42$.
5. $u_1 = 1\ u_2 = 2, u_3 = 2$ et $u_6 = 4$.
6. Pour augmenter un nombre de $t\%$, je le multiplie par $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$.
   $u_1 = 1\ 000 \times 1,025 = 1\ 025,\ u_2 = u_1 \times 1,025 = 1\ 000 \times (1,025)^2 \approx 1\ 050{,}63$
   $u_3 = 1\ 000 \times (1,025)^3 \approx 1\ 076{,}89$ et $u_6 = 1\ 000 \times (1,025)^6 \approx 1\ 159{,}69$.
7. $u_1 = 1,\ u_2 = 4,\ u_3 = 1$ et $u_6 = 2$.

2 Sens de variation d'une suite

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = 3(n+1) - 5 = 3n - 2$, donc :
   $u_{n+1} - u_n = (3n-2) - (3n-5) = 3 > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = -(n+1)^2 + 5(n+1) - 2 - (-n^2 + 5n - 2) = -2n + 4$.
   Or $-2n+4$ est positif ssi $n \leqslant 2$ et négatif ssi $n \geqslant 2$, donc la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 2.
3. Exemple d'utilisation des trois méthodes sur la même suite.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+2}{n+3} - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{(n+2)^2 - (n+1)(n+3)}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)}$, or $n+2 > 0$ et $n+3 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
   - Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
     Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+2}{n+3} \times \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{n^2+4n+4}{n^2+4n+3}$, or $n^2+4n+4 > n^2+4n+3$, donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et la suite (u_n) est croissante.
   - On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2}$.
     f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = \dfrac{1(x+2) - 1(x+1)}{(x+2)^2} = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la suite (u_n) est croissante.
4. Tous les termes de la suite sont strictement positifs.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{3^{n+1}}{2} \times \dfrac{2}{3^n} = 3 > 1$, donc la suite (u_n) est croissante.

5. On a : $u_n = f(n)$, avec $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$

   f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ **alors** (u_n) est croissante

6. - Je ne peux pas appliquer la méthode du quotient car tous les termes de la suite ne sont pas strictement positifs.
   - Je ne peux pas appliquer la méthode utilisant une fonction car je ne sais pas étudier les variations de $x \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right)^x$.
   - Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
     $u_{n+1} - u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2} - 1\right) = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
     Or l'expression $-\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ est positive lorsque n est impair et elle est négative lorsque n est pair, donc la suite (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 3$ et la suite (u_n) est croissante.
8. Tous les termes de la suite sont strictement positifs. (pour le prouver rigoureusement, il faudrait une méthode de démonstration qui est au programme de terminale, mais nous l'admettons ici)

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$, donc la suite (u_n) est décroissante.
9. Je pose $u_n = f(n)$, avec f définie sur $[0; +\infty[$, par : $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$.

   f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$.

   Or $x+1 \geqslant x > 0$ donc $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x} > 0$ et $f'(x) \leqslant 0$. La fonction f est donc décroissante sur $]0; +\infty[$ et (u_n) est décroissante.

3 Majoration, minoration

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $-\frac{1}{n} < 0$ donc $u_n < 5$ et la suite est majorée par 5.

   D'autre part : $n \geqslant 1$ donc $\frac{1}{n} \leqslant 1$ et $u_n = 5 - \frac{1}{n} \geqslant 4$, donc (u_n) est minorée par 4.

   La suite (u_n) est bien bornée.
2. Je traite les deux questions par deux méthodes différentes.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 2 = \frac{2n+1}{n+2} - 2 = \frac{2n+1-2(n+2)}{n+2} = \frac{-3}{n+2}$.

   Or $n+3 > 0$, donc $\frac{-3}{n+2} < 0$ et $u_n - 2 < 0$, ce qui donne $u_n < 2$.

   La suite est majorée par 2.

   (b) Soit $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+2}$, f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

   $f'(x) = \frac{2(x+2) - 1(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$.

   La fonction f est donc croissante, de plus $f(0) = \frac{1}{2}$, donc f est minorée par $\frac{1}{2}$ et par conséquent (u_n) aussi.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n - 17 = -n^2 + 8n + 1 - 17 = -n^2 + 8n - 16 = -(n+4)^2 < 0$.
   Donc $u_n < 17$ et la suite (u_n) est majorée par 17.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.
   Or $n \geqslant 0$, donc $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geqslant 1$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leqslant 1$. (Car la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$.)
   Finalement $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, donc la suite (u_n) est bornée par 0 et 1.

4 Suites arithmétiques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 2 - 3n + 2 = 3$, donc (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -2$
2. Le 9$^{\text{ième}}$ terme est $u_8 = 5 + 8 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{23}{3}$
   $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 9 \times \dfrac{5 + \frac{23}{3}}{2} = 57$.
3. $u_{15} = u_1 + 14 \times (-2) = -26, \quad u_7 = u_1 + 6 \times (-2) = -10,$
   et $\Sigma = u_7 + u_8 + \ldots + u_{15} = 9 \times \dfrac{-10-26}{2} = -162$.
4. $S = 11 + 14 + 17 + \ldots + 170 + 173$ est la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 11$ et de raison $r = 3$.
   Soit n l'indice du dernier terme : $u_n = u_0 + nr \Leftrightarrow 173 = 11 + n \times 3 \Leftrightarrow n = 54$, il y a donc 55 termes dans la somme et : $S = 55 \times \dfrac{11+173}{2} = 5\,060$.

5 Suites géométriques

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{7^{n+2}}{5} = 7 \times \dfrac{7^{n+1}}{5} = 7u_n$, donc (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = \dfrac{7}{5}$ et de raison 7.
2. $u_7 = u_1 \times (-3)^6 = \dfrac{1}{81} \times (-3)^6 = 9$ et $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_7 = \dfrac{1}{81} \times \dfrac{1-(-3)^7}{1-(-3)} = \dfrac{547}{81}$.
3. Σ est la somme des termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 2
   Je cherche l'indice n du dernier terme : $u_n = u_0 q^n \Leftrightarrow 4\,096 = 1 \times 2^n \Leftrightarrow n = 12$
   donc $\Sigma = 1 \times \dfrac{1-2^{13}}{1-2} = 8\,191$.
   Remarque : Nous ne savons pas, pour l'instant, résoudre l'équation $2^n = 4\,096$. Il faut faire des essais sur la calculatrice.

6 Suite "arithmético-géométrique"

1. Calculer $u_1 = 4,\ u_2 = 5$ et $u_3 = \dfrac{11}{2}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{1}{2}\,u_n + 3 - 6 \\ &= \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 \\ &= \frac{1}{2}\,v_n \end{aligned}$$.

   Donc la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$
3. Pour tout entier naturel n, on a $v_n = v_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = -4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 6$.
4. On a : $S = -4 \times \dfrac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = -\dfrac{1\ 023}{128}$

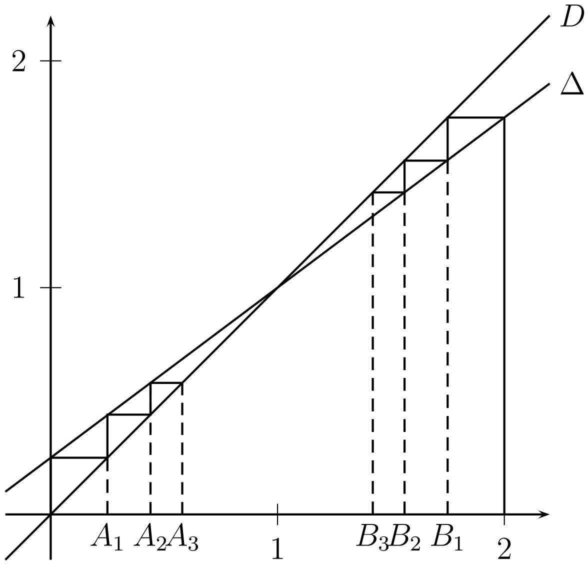
   et $S' = u_0 + u_1 \ldots + u_9 = v_0 + 6 + v_1 + 6 + \ldots v_9 + 6 = -\dfrac{1\ 023}{128} + 6 \times 10 = \dfrac{6\ 657}{128}$.

7 Augmentation de loyer

1. **Contrat n°1 :**
   (a) $u_1 = 4\ 800 \times 1,05 = 5\ 040$.
   (b) $u_n = 4\ 800 \times 1,05^n$, c'est suite géométrique.
   (c) $u_8 = 4\ 800 \times 1,05^8 \approx 7\ 091{,}79$.
   (d) $u_0 + u_1 + \ldots + u_8 = 4\ 800 \times \dfrac{1 - 1,05^9}{1 - 1,05} \approx 52\ 927{,}51$
2. **Contrat n°2 :**
   (a) $v_1 = v_0 + 300 = 5\ 100$.
   (b) $v_n = 4\ 800 + 300n$, c'est une suite arithmétique.
   (c) $v_8 = 7\ 200$
   (d) $v_0 + v_1 + \ldots + v_8 = 9 \times \dfrac{4\ 800 + 7\ 200}{2} = 54\ 000$. Le premier contrat est donc plus avantageux pour le locataire.

8 Suites et représentation graphique

1. $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{7}{16}$, $u_3 = \frac{37}{64}$ et $v_1 = \frac{7}{4}$, $v_2 = \frac{25}{16}$, $v_3 = \frac{91}{64}$.



3. $s_0 = 2$, $s_1 = 2$, $s_3 = 2$ et $s_3 = 2$. On peut conjecturer que la suite (s_n) est constante égale à 2.

4. (a) Pout tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} =$
$$\begin{aligned} & v_{n+1} - u_{n+1} \\ & \frac{3v_n+1}{4} - \frac{3u_n+1}{4} \\ &= \frac{3}{4}(v_n - u_n) \\ &= \frac{3}{4}d_n \end{aligned}$$
Donc (d_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}, d_n = d_0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On a : $\begin{cases} v_n + u_n = s_n \\ v_n - u_n = d_n \end{cases}$ ssi $\begin{cases} v_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} \\ u_n = \dfrac{s_n - d_n}{2} \end{cases}$, donc $\begin{cases} v_n = 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \\ u_n = 1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \end{cases}$.