Exercices avec solutions: sur les suites numériques

Aide et rappel de cours

2 Sens de variation d'une suite

Définition :

- Un suite (u_n) est croissante à partir d'un rang n_0 ssi :

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \geqslant u_n.$$

- Un suite (u_n) est décroissante à partir d'un rang n_0 ssi :

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$$

Pour étudier le sens d'une variation, vous avez le choix entre les trois méthodes ci-dessous, et quelquefois c'est dur d'avoir le choix.... Il faut vous fiez à votre expérience et à votre maîtrise des calculs.

Méthodes :

- La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ssi

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

- **Pour une suite dont tous les termes sont strictement positifs.**
  La suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0 ssi

$$\text{Pour tout } n \geqslant n_0 \text{ alors } u_{n+1} - u_n \geqslant 0$$

- Soit la suite u_n définie par $u_n = f(n)$.
  Si la fonction f est croissante sur l'intervalle $[n_0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang n_0.
  Attention, pour cette dernière propriété, la réciproque est fausse.

Il y a des propriétés correspondantes pour une suite décroissante.

3 Majoration, minoration

Définition :

- Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant M$$

- Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant m$$

- Une suite est bornée, lorsqu'elle est majorée et minorée.

Méthodes :

Pour montrer qu'une suite est majorée par un réel M, on peut :

- Travailler sur des inégalités.
- Montrer que la différence $u_n - M$ est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Soit $u_n = f(n)$, montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}^+$.

4 Suites arithmétiques

- Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r ($r \in \mathbb{R}$) si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on prouve que la différence $u_{n+1} - u_n$ est indépendante de n.

- Le premier terme est u_0 :
  Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 + nr$.
- Le premier terme est u_1 :
  Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
- Somme des premiers termes :
  Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}$.
  Certains préfèrent le retenir sous une des formes suivantes :

$$\text{nombre de termes} \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

ou bien : nombre de termes $\times$ moyenne entre le premier et le dernier terme.

5 Suites géométriques

- Une suite (u_n) est dite géométrique de raison q ($q \in \mathbb{R}$) si :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$$

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on part de u_{n+1} et on cherche à l'écrire en fonction de u_n.

- Le premier terme est u_0 :
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.
- Le premier terme est u_1 :
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.
- Somme des premiers termes :
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
  Certains préfèrent le retenir sous la forme suivante :

$$\text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}.$$

6 Suite "arithmético-géométrique"

- Pour la question 2 : On écrit v_{n+1} en fonction de u_{n+1}, puis en fonction de u_n, puis en fonction de v_n.
- Pour la question 4 : Je sais calculer la somme des termes d'une suite géométrique...

7 Augmentation de loyer

- Pour augmenter une somme de $t\%$, je la multiplie par $\left(1+\frac{t}{100}\right)$.
- Pour le contrat 1, je reconnais une suite géométrique.
- Pour le contrat 2, je reconnais une suite arithmétique.