

I. GENERALITES SUR LES SUITES :

01. Définition :

I est une partie de \mathbb{N} . toute application u de I vers \mathbb{R} s'appelle suite numérique . Donc :

$u : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $n \mapsto u(n)$ on note simplement la suite par $(u_n)_{n \in I}$.

02. Exemples :

- $(w_n = 2n)_{n \geq 0}$. $v_n = \frac{1}{n-1}$; $n \geq 2$. $u_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n}$; $n \in \mathbb{N}$. $\begin{cases} u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n & n \geq 0 \\ u_0 = 3 & u_1 = 4 \end{cases}$
- Pour la dernière suite pour calculer u_{i+2} il faut calculer u_i et u_{i+1} ; la suite (u_n) est appelée suite récurrente d'ordre 2 .
- Calculer : u_2 et u_3 .

03. Vocabulaire :

- u_n s'appelle le terme général de la suite .
- u_{n_0} s'appelle le premier terme de la suite avec n_0 est le plus petit élément de I .
- Le nombre $u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n$ s'appelle la somme des $(n - n_0 + 1)$ premiers termes de la suite .

04. Application :

On considère la suite numérique $(v_n)_{n \geq 1}$ définie par : $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = 1 + v_n \end{cases}$.

1 Calculer v_2 ; v_3 ; v_4 .

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = n$.

II. Suite majorée – suite minorée – suite bornée :

01. Activité :

On considère la suite $(u_n = \frac{1}{n})_{n \geq 1}$.

1 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $u_n < 1$.

2 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; $u_n > 0$.

3 Que peut-on déduire ?

02. Définitions :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique , M et m de \mathbb{R} .

- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite majorée par M équivaut à $\forall n \geq n_0$; $u_n \leq M$ (ou encore $\forall n \geq n_0$; $u_n < M$).
- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite minorée par m équivaut à $\forall n \geq n_0$; $m \leq u_n$ (ou encore $\forall n \geq n_0$; $m < u_n$)
- $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite bornée équivaut à (u_n) est une suite majorée et minorée .

03. Application :

On considère la suite numérique $(w_n = \frac{n+3}{n+4})_{n \in \mathbb{N}}$.

1 Montrer que la suite (u_n) est majorée et minorée.

III. Monotonie d'une suite :

01. Activité :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique. n et n' supérieure ou égale à n_0 .

1 Compléter pour que la suite (u_n) est croissante. $\forall n \geq n_0, \forall n' \geq n_0 : n > n' \Rightarrow \dots$.

2 Compléter pour que la suite (u_n) est décroissante. $\forall n \geq n_0, \forall n' \geq n_0 : n > n' \Rightarrow \dots$.

02. Définitions :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

- la suite (u_n) est croissante équivaut à : $\forall n \geq n_0, \forall n' \geq n_0 : n > n' \Rightarrow u_n \geq u_{n'}$.
- la suite (u_n) est strictement croissante équivaut à : $\forall n \geq n_0, \forall n' \geq n_0 : n > n' \Rightarrow u_n > u_{n'}$.
- la suite (u_n) est décroissante équivaut à : $\forall n \geq n_0, \forall n' \geq n_0 : n > n' \Rightarrow u_n \leq u_{n'}$.
- la suite (u_n) est strictement décroissante équivaut à : $\forall n \geq n_0, \forall n' \geq n_0 : n > n' \Rightarrow u_n < u_{n'}$.
- la suite (u_n) est constante équivaut à : $\forall n \geq n_0, \forall n' \geq n_0 : u_n = u_{n'}$.

03. Propriété :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique.

- la suite (u_n) est croissante équivaut à : $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} \geq u_n$.
- la suite (u_n) est strictement croissante équivaut à : $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} > u_n$.
- la suite (u_n) est décroissante équivaut à : $\forall n \geq n_0 : n > n' \Rightarrow u_{n+1} < u_n$.
- la suite (u_n) est strictement décroissante équivaut à : $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} < u_n$.
- la suite (u_n) est constante équivaut à : $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n$.

04. Exemple :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + u_n$.

1 Etudier la monotonie de la suite (u_n) .

IV. Suite arithmétique :

01. Activité :

On suppose qu'une montagne sa hauteur est 1600 m à l'année 2000 tel que sa hauteur est influencée par l'héritage, sa hauteur diminue 2 cm chaque année.

1 Ecrire ses données sous forme d'une suite.

2 Précisez l'année telle que la hauteur sera 1599 mètre

Indication : on prend la suite : $(v_n)_{n \geq 2000}$ tel que $v_{n+1} = v_n - 2$ et $v_{2000} = 160000 = 16 \times 10^4$.

02. Vocabulaire :

La suite (v_n) s'appelle suite arithmétique de raison $r = -2$.

03. Définition :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique . r est un nombre réel non nul .

La suite (u_n) est arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} équivaut à

$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} - u_n = r$ (ou encore $\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = u_n + r$).

04. Application :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_n = 2n + 3$; $n \geq 0$.

I Montrer que : (u_n) est une suite arithmétique et précise ses éléments caractéristiques .

V. La formule du terme général d'une suite arithmétique :

01. Propriété :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$

02. Démonstration :

Démontrer la propriété précédente :

03. Propriété :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} on a $\forall p, q \geq n_0 : u_q = u_p + (q - p)r$

04. Application :

- (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_7 = 10$ calculer u_{2007} .
- (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$ déterminer sa raison r et donner u_n en fonction de n .

VI. La somme des n premier termes d'une suite arithmétique :

01. Propriété :

(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} et $n_0 \leq p \leq n$ on a :

$$S_n = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{u_n + u_p}{2} \right] \times (n - p + 1) \text{ ou encore :}$$

$$S_n = \frac{(\text{le premier terme}) + (\text{le dernier terme})}{2} \times (\text{le nombre des termes de la somme}) .$$

02. Remarque :

- La somme suivante $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ possède $n + 1$ termes . (c.à.d. $n - 0 + 1$) .
- La somme suivante $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$ possède n termes . (c.à.d. $n - 1 + 1$) .
- La somme suivante $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + u_{n_0+2} + \dots + u_n$ possède $n - n_0 + 1$ terme .

VII. Suite géométrique :

01. Définition :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite numérique . q est un nombre réel non nul .

La suite (u_n) est géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} équivaut à

$$\forall n \geq n_0 : u_{n+1} = q \times u_n \quad (\text{ou encore } \forall n \geq n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} = q ; (u_n \neq 0)).$$

VIII. La formule du terme général d'une suite géométrique (c.à.d. u_n en fonction de n)

01. Exemple : $u_n = 2 \times 5^n ; n \geq 0$

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

1. Montrer que : (u_n) est une suite géométrique et préciser ses éléments caractéristiques .

02. Propriété :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall n \geq n_0 : u_n = u_{n_0} \times q^{(n-n_0)}$

03. Démonstration :

Démontrer la propriété précédente on utilise une démonstration par récurrence :

04. Propriété :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} on a : $\forall p, q \geq n_0 : u_q = u_p \times q^{q-p}$

IX. La somme des n premier termes d'une suite géométrique :

03. Propriété :

$(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} et $n_0 \leq p \leq n$.

- Si $q \neq 1$ on a : $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = \left[\frac{q^{(n-p+1)} - 1}{q - 1} \right] \times u_p$.

- Si $q = 1$ on a : $S = \sum_{i=p}^{i=n} u_i = u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \dots + u_n = u_p + u_p + u_p + \dots + u_p = u_p(n - p + 1)$.

X. La moyenne arithmétique – la moyenne géométrique :

01. Propriété 1 :

Si $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors

$$u_i + u_{i+2} = 2u_{i+1} \quad \text{ou encore } a + c = 2b . \quad (\text{on n'oublie pas } u_i = u_{i+1} - r \text{ et } u_{i+2} = u_{i+1} + r).$$

La relation $a + c = 2b$ (ou $u_i + u_{i+2} = 2u_{i+1}$) s'appelle moyenne arithmétique .

02. Propriété 2 :

Si $u_i = a$ et $u_{i+1} = b$ et $u_{i+2} = c$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors

$$u_i \times u_{i+2} = (u_{i+1})^2 \quad \text{ou encore } a \times c = b^2 . \quad (\text{on n'oublie pas } u_{i+1} = q \times u_i \text{ et } u_{i+2} = q \times u_{i+1}).$$

La relation $a \times c = b^2$ (ou $u_i \times u_{i+2} = (u_{i+1})^2$) s'appelle moyenne géométrique .