

I. RAPPEL :

01. Définition :

1. \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

le produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tel que :

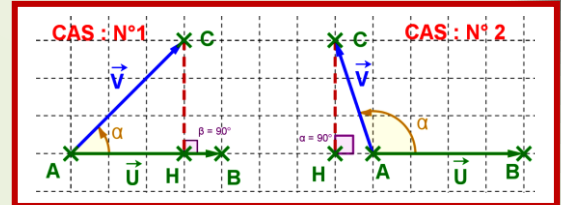
- Si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$ on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A \neq B$ car $\vec{u} \neq \vec{0}$) alors

- ❖ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$ si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} ont même sens.
- ❖ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AH} ont les sens opposés.

2. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2$ est appelé le carré scalaire de \overrightarrow{AB} ou de \vec{u} .

3. Le nombre réel positif $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$ est appelé la norme du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et on note $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$ ou

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB \text{ (remarque } \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 \text{)}.$$



02. Propriétés

\vec{u} et \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs du plan tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. La forme trigonométrique du produit scalaire (avec $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$) tel que

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \alpha \text{ (mod } 2\pi) \text{ est : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \alpha \text{ ou encore } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha.$$

2. Symétrie du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

3. Linéarité du produit scalaire :

$$\begin{cases} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$$

4. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}^2 \geq 0$.

5. produit scalaire est non dégénéré : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

6. orthogonalité de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} : $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

03. Base et repère (orthonormé direct)

Définitions :

- \vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non colinéaires du plan (P) . le couple $B = (\vec{i}, \vec{j})$ s'appelle base du plan . on dit que le plan (P) est rapporté à la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$ (ou encore le plan (P) est muni à la base $B = (\vec{i}, \vec{j})$)
- O est un point de (P) et $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base de (P) le triplet $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ s'appelle repère de (P) . on dit que le plan est rapporté au repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ (ou encore le plan est muni au repère R)

- $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée si et seulement si $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Dans ce cas le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère orthonormé.
- $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée directe si et seulement si $B = (\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée et $\overrightarrow{(\vec{i}, \vec{j})} = \frac{\pi}{2} \text{ (} 2\pi \text{)}$. $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$. Dans ce cas le repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ est appelé repère orthonormé direct.

II. L'expression analytique du produit scalaire et la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

▲ **Remarque :** dans toute la suite du chapitre le plan (P) est rapporté à un repère $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé direct

A. L'expression analytique de : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et AB

01. Activité :

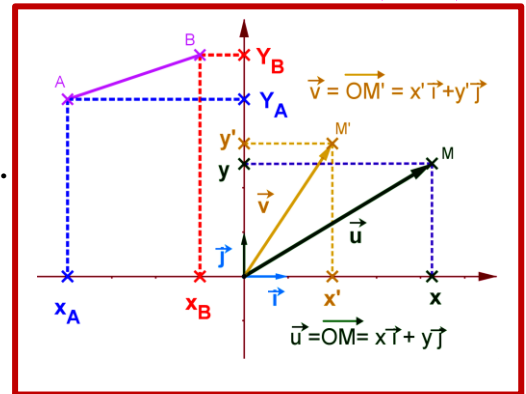
$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P).

1. Calculer : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ en fonction de x et y et x' et y' puis $\|\vec{u}\|$ en fonction de x et y.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante en fonction de x et y et x' et y' tel que $\vec{u} \perp \vec{v}$.

3. Calculer la distance AB en fonction des coordonnées de $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.

4. Donner la propriété.



02. Propriété :

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs du plan (P) . on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$.
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2)}$ avec $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$.
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$.

03. Exemple :

On donne : $\vec{u}(2, -4)$ et $\vec{v}(-1, 2)$ et $A(1, 0)$ et $B(-1, 0)$.

1. Calculer : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{u}\|$ et AB .
 2. Déterminer le vecteur $\vec{v}(x, y)$ unitaire et colinéaire à \vec{v} (c.à.d. $\|\vec{v}\| = 1$) .
 3. Montrer que : le triangle ABC est rectangle en A tel que : $A(1, 3)$ et $B(3, 1)$ et $C(-3, -1)$.
 4. Déterminer un vecteur directeur de la hauteur issue du sommet A .
- (triangulaire) .

III. Formules de : $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v})$:

A. Formules de : $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v})$:

01. Activité :

$\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs **non nuls** de (P) . on pose $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha (2\pi)$ et le vecteur $\vec{w}(-y;x)$. (voir la figure)

1. Donner : $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ en fonction de x et y et x' et y' .

2. Calculer $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$; quelle remarque peut-on tirer ?

3. Montrer que : $(\vec{v}, \vec{w}) \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha (2\pi)$ (on peut utiliser $(\vec{u}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) : (2\pi)$) .

4. Donner l'expression trigonométrique de $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et on déduit que : $\sin \alpha$ (réponse :

$$\left(\sin \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|} \right) .$$

5. on déduit $\sin \alpha$: en fonction de $\det(\vec{u}, \vec{v})$ et $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{w}\|$; puis en fonction de

$$x \text{ et } y \text{ et } x' \text{ et } y' \text{ (réponse } \left(\sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right)) .$$

02. propriété :

$\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ deux vecteurs **non nuls** de (P) avec $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \alpha (2\pi)$.

$$\text{on a : } \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}} .$$

B. l'aire (ou surface) d'un triangle et d'un parallélogramme :

01. Activité :

Dans le plan (P) on considère un triangle ABC non aplati et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) .

1. Donner la surface S de ABC .

2. Exprimer S en fonction de $\left| \sin \left((\vec{AB}, \vec{AC}) \right) \right|$.

3. Exprimer S en fonction de $\det(\vec{AB}, \vec{AC})$.

4. On déduit la surface du parallélogramme ABCD .

02. Propriété :

ABC est un triangle dans le plan (P) .

- La surface S_{ABC} du triangle ABC est : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$.
- La surface S_{ABCD} du parallélogramme ABCD est : $S_{ABCD} = \left| \det(\vec{AB}, \vec{AC}) \right|$.

IV. La droite dans le plan (étude analytique) :

A. vecteur normal :

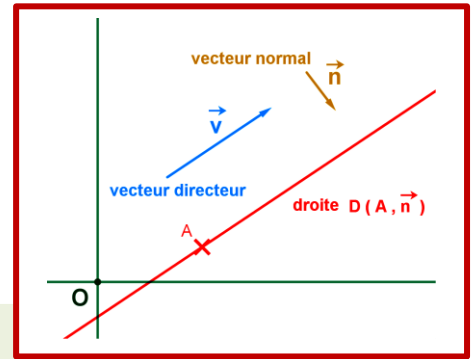
01. Activité :

$D(A, \vec{u})$ est une droite dans le plan (P) . Que remarquez-vous ?

02. Définition :

$D(A, \vec{u})$ est une droite dans le plan (P) .

Tout vecteur \vec{n} non nul orthogonal au vecteur directeur \vec{u} de la droite $D(A, \vec{u})$ s'appelle vecteur normal à la droite $D(A, \vec{u})$.



03. remarque :

- Les vecteurs $\alpha \vec{n}$ (avec $\alpha \neq 0$) sont normaux à la droite $D(A, \vec{u})$.
- \vec{n} et \vec{n}' sont normaux à la droite $D(A, \vec{u})$ donc \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires .
- $\vec{n}(a, b)$ normal à la droite (D) équivaut $\vec{u}(-b, a)$ est un vecteur directeur à la droite (D) .

B. Ensemble des points M tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

01. Activité :

A est un point de (P) et \vec{n} est un vecteur non nul de (P) .

1. Déterminer l'ensemble des points M(x,y) de (P) tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

02. Propriété :

l'ensemble des points M(x,y) de (P) tel que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ est la droite $D(A, \vec{n})$ passant par A dont le vecteur normal est \vec{n} .

C. Equation cartésienne de la droite $D(A, \vec{n})$:

01. Activité :

$D(A, \vec{u})$ est une droite dans le plan (P) tel que $A(x_A, y_A)$ et $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal de $D(A, \vec{u})$; M(x,y) est un point de (P) .

1. Montrer que : $M(x, y) \in D(A, \vec{n}) \Rightarrow ax + by + c = 0$; on détermine c .

2. On étudier la réciproque : E est l'ensemble des points M(x,y) de (P) tel que $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ montrer que l'ensemble E est la droite $D(A, \vec{n})$.

02. Propriété et définition :

- M(x,y) est un point de (P) appartient à la droite $D(A(x_A, y_A) ; \vec{n}(a, b))$ si et seulement si $ax + by + c = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ et $c = -ax_A - by_A$.
- $ax + by + c = 0$ s'appelle l'équation cartésienne de la droite $D(A, \vec{n})$

03. Remarque :

Pour l'équation cartésienne **(D) : $ax + by + c = 0$** on a :

- $\vec{n}(a, b)$ vecteur normal à la droite **(D)** .
- $\vec{u}(-b, a)$ vecteur directeur à la droite **(D)** .

04. Application :

1. Donner l'équation cartésienne de la droite $D \left(A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$.

2. On considère le triangle ABC tel que $A(2,1)$ et $B(0,1)$ et $C(-2,3)$.

- a.** Déterminer les équations cartésiennes de la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$.
- b.** Déterminer Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Correction :

1. Equation cartésienne de la droite $D \left(A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$. On a :

- $\vec{n}(1, 5)$ est un vecteur normal à la droite **(D)** donc une équation est de la forme **(D) : $1x + 5y + c = 0$** .
- Le point $A \in (D)$ donc : $A(2, 0) \in (D) : 1 \times 2 + 5 \times 0 + c = 0$ d'où $c = -2$.

Conclusion : Equation cartésienne est **(D) : $1x + 5y - 2 = 0$** .

2. les équations cartésiennes de la médiatrice de $[AB]$ et $[AC]$.

a. Equation cartésienne de (D_1) la médiatrice de $[AB]$.

- (D_1) médiatrice de $[AB]$ donc $(AB) \perp (D_1)$ d'où \overrightarrow{AB} est normal à la droite (D_1) .
- $I(1, 1)$ est le milieu de $[AB]$ donc (D_1) passe par I .

D'où : $M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0$$

Donc : $(D_1) : x - 1 = 0$

b. Equation cartésienne de (D_1) la médiatrice de $[AC]$.

- (D_2) médiatrice de $[AC]$ donc $(AC) \perp (D_1)$ d'où \overrightarrow{AC} est normal à la droite (D_2) .
- $J(-1, 2)$ est le milieu de $[AC]$ donc (D_2) passe par J .

D'où : $M(x; y) \in (D') \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) + 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 6 = 0$$

Donc : $(D_2) : -x + y - 3 = 0$

b. On détermine Ω le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

On sait que l'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \Omega(x, y) \in (D) \cap (D') &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où : $\Omega(1, 4)$.

Conclusion : $\Omega(1, 4)$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

D. Orthogonalité de deux droites (D) et (D') :

01. Activité :

1. $D(A, \vec{u})$ et $D'(B, \vec{u}')$ deux droites de (P) dont on a les vecteurs directeur .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que $(D') \perp (D)$.

2. $D(A, \vec{n})$ et $D'(B, \vec{n}')$ deux droites de (P) dont on a les vecteurs normaux .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que $(D') \perp (D)$.

02. Propriété :

On considère les droites (D) et (D') d'équations cartésiennes : $(D) : ax + by + c = 0$ et

$(D') : a'x + b'y + c' = 0$ tel que $\vec{n}(a, b)$ et $\vec{n}'(a', b')$ sont les vecteurs normaux respectivement à

(D) et (D') . on a : $(D') \perp (D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$.

03. Application :

Déterminer une équation cartésienne d'une droite (D') orthogonale à (D) tel que :

$(D) : 2x + y - 3 = 0$.

E. Distance d'un point à une droite (D) .

01. Activité :

Comment on détermine la plus proche distance du point A à la droite (D) .

02. Définition :

$D(A, \vec{u})$ est une droite du plan (P) et A est un point de (P) et H sa projection orthogonale sur (D) . la distance AH est appelée la distance de A à (D) et on note $d(A, (D)) = d = AH$.

03. Activité :

$D(A, \vec{u})$ est une droite du plan (P) tel que son équation cartésienne est $(D) : ax + by + c = 0$ et

$A(x_A, y_A)$ est un point de (P) et $H(x_H, y_H)$ sa projection orthogonale sur (D) .

1. Montrer que $\vec{c} = -ax_H - by_H$ puis $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = |ax_A + by_A + c|$.

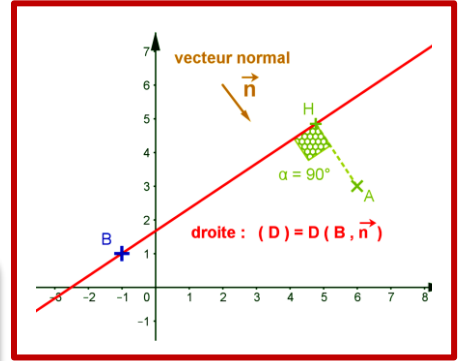
2. Montrer que $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = |ax_A + by_A + c|$.

3. On déduit AH en fonction de a et b et x_A et y_A .

04. Propriété :

La distance du point $A(x_A, y_A)$ de (P) à une droite d'équation

cartésienne (D) : $ax + by + c = 0$ est : $d(A; D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



05. Exemple :

(D') : $-x + y - 3 = 0$ et $A(2, 5)$ on a $d(A; D) = \frac{|-2 + 5 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = 0$ donc $A \in (D)$.

V. Le cercle étude analytique :

A. Equation cartésienne du cercle $C(\Omega(a, b); r)$.

01. Activité :

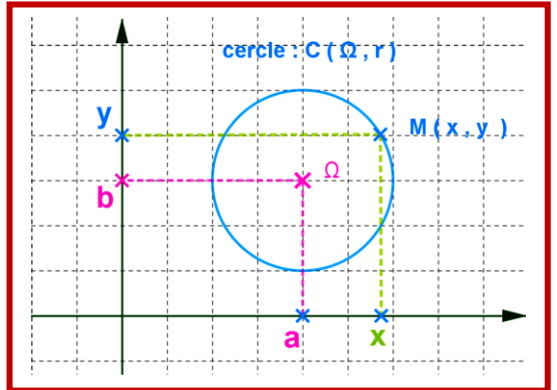
$\Omega(a, b)$ est un point de (P) et $r \in \mathbb{R}^{+*}$, ($r > 0$).

1. Compléter l'équivalence suivant on utilise a et b et x et y

$M(x, y) \in C(\Omega(a, b); r) \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

02. Propriété :

Tout cercle $C(\Omega(a, b); r)$ du plan (P) a pour équation cartésienne de la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ou encore : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ avec $c = a^2 + b^2 - r^2$.



03. Exemple :

- Donner équation cartésienne du cercle $C(\Omega(0, 0); 1)$.
- Donner équation cartésienne du cercle de diamètre [AB] avec : $A(1; 0)$ et $B(-1; 0)$.

B. Equation cartésienne du cercle de diamètre [AB].

01. Activité :

$M(x; y)$ est un point de (P) ; $C_{[AB]}$ est cercle de diamètre [AB] avec $A \neq B$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante de $M(x; y) \in C_{[AB]}$

02. Propriété :

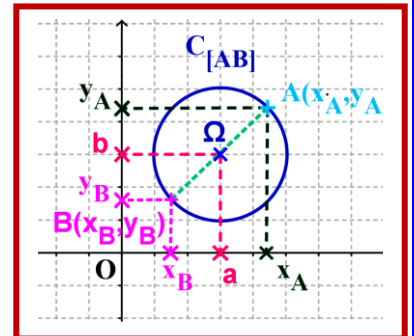
Equation cartésienne du cercle de diamètre [AB] est : $M(x; y) \in C_{[A; B]} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$.

03. Exemple :

$A(1; 0)$ et $B(-1; 0)$ deux points de (P). trouver équation cartésienne de $C_{[AB]}$.

Correction : On trouve équation cartésienne de $C_{[AB]}$.

On a : $M(x; y) \in C_{[A; B]} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$.



$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Conclusion : $C_{[AB]} : x^2 + y^2 - 1 = 0$.

C. Le cercle passant par trois points :

Le cercle passant par trois A et B et C non alignés c'est le cercle circonscrit au triangle ABC tel que son centre Ω est l'intersection des médiatrices et son rayon est $r = \Omega A$.

D. Présentation paramétrique d'un cercle :

01. Activité :

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\theta \in \mathbb{R}$;
 $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta : (2\pi)$.

1. Calculer : $\vec{j} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$; $\vec{i} \cdot \overrightarrow{\Omega M}$.

2. Déterminer les coordonnées du point M par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

3. D'après $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, montrer que : $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$.

02. Propriété :

$C(\Omega(a,b);r)$ est un cercle du plan (P) rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\theta \in \mathbb{R}$;
 $(\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \theta : (2\pi)$; pour tout $M(x,y)$ du plan (P) on a : $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$.
 On l'appelle présentation paramétrique d'un cercle $C(\Omega(a,b);r)$.

03. Exemple :

Donner présentation paramétrique d'un cercle trigonométrique lié au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) ($C(O(0,0);1)$)

E. Etude l'ensemble des points : $\{M(x,y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$. avec a et b et c de \mathbb{R}

01. Activité :

1. Trouver l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

2. Donner la propriété

02. Propriété :

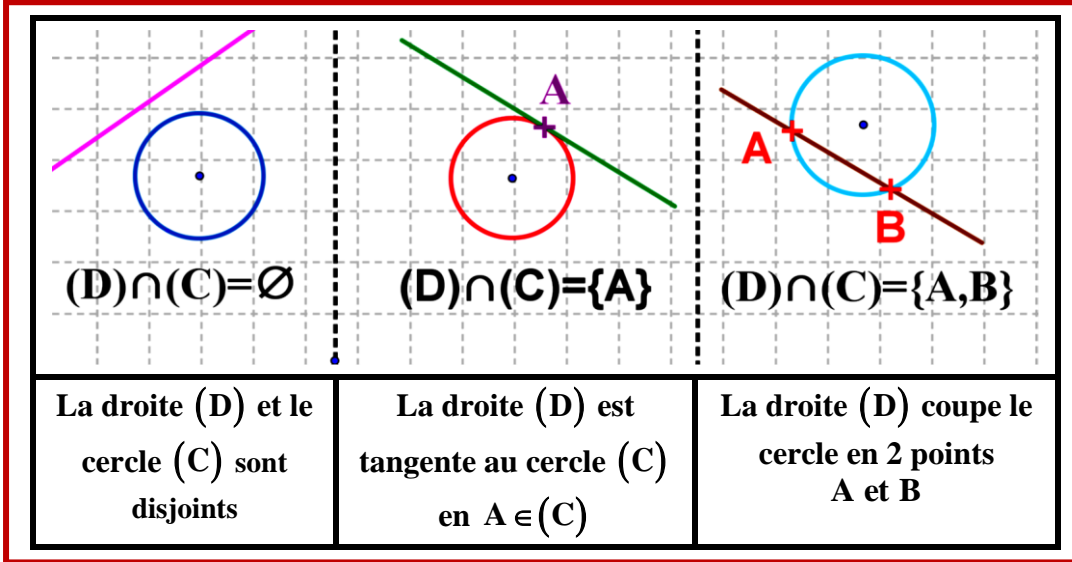
L'ensemble des points $M(x,y)$ du plan (P) qui vérifie $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ est :

- Si $A = a^2 + b^2 - 4c < 0$ on a : $S = \emptyset$.
- Si $A = a^2 + b^2 - 4c = 0$ on a : $S = \left\{ \Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) \right\}$ (un point et un seul qui est $\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$)
- Si $A = a^2 + b^2 - 4c > 0$ on a : $S = (C) = C \left(\Omega \left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right); r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \right)$ (un cercle).

F. Etude les positions relatives d'un cercle et une droite .

01. Activité :

Tracer les positions relatives d'une droites (D) et un cercle (C) , puis donner les définitions et les propriétés .



02. Définitions et propriétés :

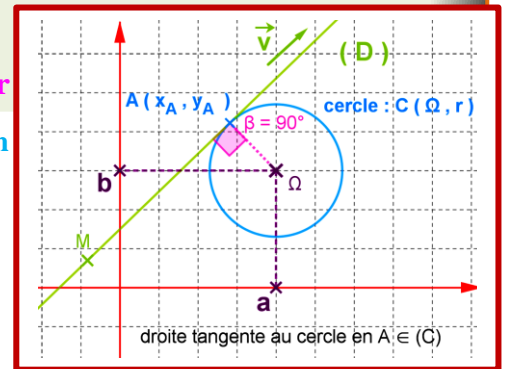
(D) est une droite du plan (P) et (C) est un cercle du plan (P) de centre Ω et de rayon r .

- (D) est à l'extérieur du cercle (C) ((D) et (C) sont disjoints $(D) \cap (C) = \emptyset$).
- (D) coupe le l'extérieur du cercle (C) si et seulement si $d(\Omega, (D)) > r$
- (D) coupe le cercle (C) en deux points A et B ($(D) \cap (C) = \{A, B\}$).
- (D) coupe le cercle (C) si et seulement si $d(\Omega, (D)) < r$
- (D) est tangente au cercle (C) ($(D) \cap (C) = \{A\}$).
- (D) est tangente au cercle (C) si et seulement si $d(\Omega, (D)) = r$

G. Equation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point A du cercle .

01. Activité :

$D(A, \vec{u})$ est une droite du plan (P) et A est un point d' un cercle $C(\Omega, r)$ tel que (D) est tangente à (C) .



1. Trouver condition nécessaire et suffisante tel que $M(x, y)$ appartienne à (D) .

2. On déduit l'équation cartésienne de $D(A; \vec{u})$; puis donner la propriété .

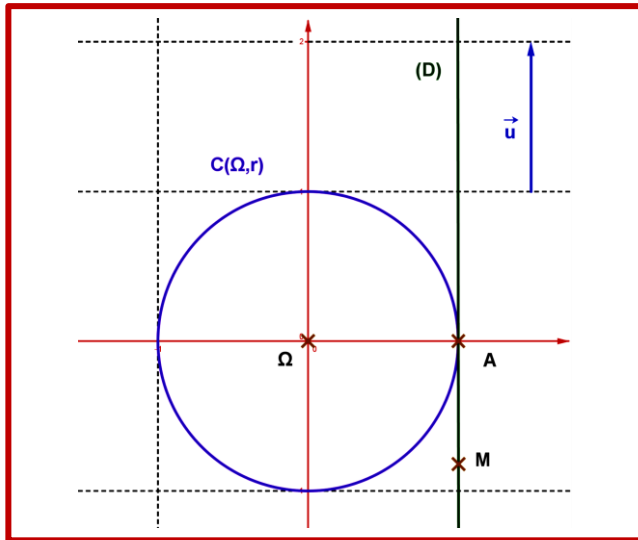
02. Propriété :

l'équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ tangente au cercle $C(\Omega, r)$ en un point $A(x_A, y_A)$ de

$C(\Omega, r)$ est : $\overrightarrow{\Omega A} \cdot \vec{u} = 0$ ou encore $\begin{pmatrix} x_A - a \\ y_A - b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = 0$.

03. Exemple :

Géométriquement donner l'équation cartésienne de la droite $D(A; \vec{u})$ qui tangente au cercle (C) .



VI. Ensemble des points M du plan (P) tel que : $MA^2 - MB^2 = k$; $MA^2 + MB^2 = k$; avec $k \in \mathbb{R}$.

A et B deux points de (P) tel que : $AB = 6$ et I est le milieu de $[AB]$.

1^{er} cas : $MA^2 + MB^2 = k$.

1. Déterminer (G_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 68$.

2. Déterminer (G_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 18$.

3. Déterminer (G_3) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 + MB^2 = 4$.

2^{ième} cas : $MA^2 - MB^2 = k$.

1. Déterminer (H_1) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 - MB^2 = 0$.

2. Déterminer (H_2) l'ensemble des points M de (P) tel que $MA^2 - MB^2 = 36$.

▲ Remarque :

On peut étudier les 2 cas précédents dans le cas général c.à.d. $k \in \mathbb{R}$ et AB et on discute avec disjonction des cas.