

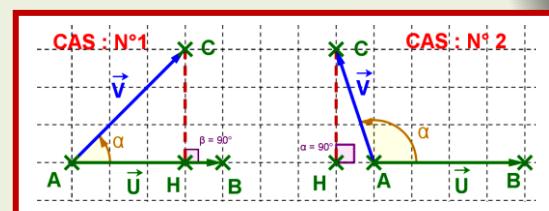
## I. RAPPEL :

### 01. Définition :

1.  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ .

le produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  tel que :

- Si  $\vec{v} = \vec{0}$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$  on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
- Si  $\vec{v} \neq \vec{0}$  et  $\vec{u} \neq \vec{0}$  et  $H$  la projection orthogonale de  $C$  sur la droite  $(AB)$  ( $A \neq B$  car  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ) alors
- ❖  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont même sens.
- ❖  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH$  si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  ont les sens opposés.



2.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2$  est appelé le carré scalaire de  $\overrightarrow{AB}$  ou de  $\vec{u}$ .

3. Le nombre réel positif  $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$  est appelé la norme du vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et on note  $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$  ou

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB \quad (\text{remarque } \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2).$$

### 02. Propriétés

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan tel que :  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

1. La forme trigonométrique du produit scalaire ( avec  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$  et  $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  ) tel que

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \alpha \quad (2\pi) \text{ est : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos \alpha \text{ ou encore } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha.$$

2. Symétrie du produit scalaire :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ .

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

3. Linéarité du produit scalaire :  $\begin{cases} \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v} \\ (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) \end{cases}$ .

4. Positivité du produit scalaire :  $\vec{u}^2 \geq 0$ .

5. produit scalaire est non dégénéré :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ .

6. orthogonalité de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

### 03. Base et repère ( orthonormé direct )

Définitions :

- $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  deux vecteurs non colinéaires du plan  $(P)$ . le couple  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  s'appelle base du plan . on dit que le plan  $(P)$  est rapporté à la base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  ( ou encore le plan  $(P)$  est muni à la base  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  )
- $O$  est un point de  $(P)$  et  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base de  $(P)$  le triplet  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  s'appelle repère de  $(P)$  . on dit que le plan est rapporté au repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  ( ou encore le plan est muni au repère  $R$  )

- $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée si et seulement si  $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$  et  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ . Dans ce cas le repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est appelé repère orthonormé.
- $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée directe si et seulement si  $B = (\vec{i}, \vec{j})$  est une base orthonormée et  $\overline{(\vec{i}, \vec{j})} \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ .  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ . Dans ce cas le repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  est appelé repère orthonormé direct.

## II. L'expression analytique du produit scalaire et la norme d'un vecteur dans un repère orthonormé :

▲ **Remarque :** dans toute la suite du chapitre le plan (P) est rapporté à un repère  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé direct

A. L'expression analytique de :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\|\vec{u}\|$  et  $AB$

### 01. Activité :

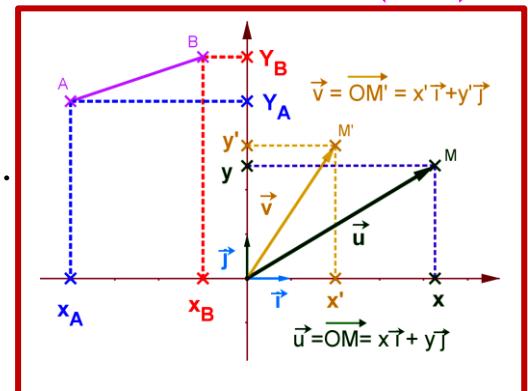
$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs du plan (P).

1. Calculer :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  en fonction de  $x$  et  $y$  et  $x'$  et  $y'$  puis  $\|\vec{u}\|$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

2. Donner une condition nécessaire et suffisante en fonction de  $x$  et  $y$  et  $x'$  et  $y'$  tel que  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

3. Calculer la distance  $AB$  en fonction des coordonnées de  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ .

4. Donner la propriété.



### 02. Propriété :

$\vec{u}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x', y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs du plan (P) . on a :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (x, y) \cdot (x', y') = xx' + yy'$ .
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .
- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B^2 - x_A^2) + (y_B^2 - y_A^2)}$  avec  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$ .
- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$  .

### 03. Exemple :

On donne :  $\vec{u}(2, -4)$  et  $\vec{v}(-1, 2)$  et  $A(1, 0)$  et  $B(-1, 0)$  .

1. Calculer :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et  $\|\vec{u}\|$  et  $AB$  .

2. Déterminer le vecteur  $\vec{v}(x, y)$  unitaire et colinéaire à  $\vec{v}$  ( c.à.d.  $\|\vec{v}\| = 1$  ) .

3. Montrer que : le triangle ABC est rectangle en A tel que :  $A(1, 3)$  et  $B(3, 1)$  et  $C(-3, -1)$  .

4. Déterminer un vecteur directeur de la hauteur issue du sommet A .

- triangulaire ) .

### III. Formules de : $\sin(\vec{u}; \vec{v})$ et $\cos(\vec{u}; \vec{v})$ :

A. Formules de :  $\sin(\vec{u}; \vec{v})$  et  $\cos(\vec{u}; \vec{v})$  :

## 01. Activité :

$\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs non nuls de  $(P)$ . on pose  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha$   $(2\pi)$  et le vecteur  $\vec{w}(-y; x)$ . ( voir la figure )

1. Donner :  $\cos(\overline{(\vec{u}, \vec{v})})$  en fonction de  $x$  et  $y$  et  $x'$  et  $y'$  .

2. Calculer  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  et  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  et  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{w}\|$  ; quelle remarque peut-on tirer ?

3. Montrer que :  $\overline{(\vec{v}, \vec{w})} = \frac{\pi}{2} - \alpha$   $(2\pi)$  ( on peut utiliser  $\overline{(\vec{u}, \vec{w})} = \overline{(\vec{u}, \vec{v})} + \overline{(\vec{v}, \vec{w})}$  :  $(2\pi)$  ) .

4. Donner l'expression trigonométrique de  $\vec{v} \cdot \vec{w}$  et on déduit que :  $\sin \alpha$  ( réponse :

$$\left( \sin \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{u}\|} \right) .$$

5. on déduit  $\sin \alpha$  : en fonction de  $\det(\vec{u}, \vec{v})$  et  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{w}\|$  ; puis en fonction de

$$\left( \sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \right) .$$

## 02. propriété :

$\vec{u}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$  et  $\vec{v}(x',y') = x'\vec{i} + y'\vec{j}$  deux vecteurs non nuls de  $(P)$  avec  $\overline{(\vec{u}, \vec{v})} = \alpha$   $(2\pi)$  .

on a :  $\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$  et  $\sin \theta = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{xy' - yx'}{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x'^2 + y'^2}}$  .

B. l'aire ( ou surface ) d'un triangle et d'un parallélogramme :

## 01. Activité :

Dans le plan  $(P)$  on considère un triangle  $ABC$  non aplati et  $H$  la projection orthogonale de  $C$  sur la droite  $(AB)$  .

1. Donner la surface  $S$  de  $ABC$ .

2. Exprimer  $S$  en fonction de  $\left| \sin(\overline{(\vec{AB}, \vec{AC})}) \right|$  .

3. Exprimer  $S$  en fonction de  $\det(\overline{AB}, \overline{AC})$  .

4. On déduit la surface du parallélogramme  $ABCD$ .

## 02. Propriété :

$ABC$  est un triangle dans le plan  $(P)$  .

- La surface  $S_{ABC}$  du triangle  $ABC$  est :  $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \det(\overline{AB}, \overline{AC}) \right|$  .

- La surface  $S_{ABCD}$  du triangle  $ABC$  est :  $S_{ABCD} = \left| \det(\overline{AB}, \overline{AC}) \right|$  .

## IV. La droite dans le plan ( étude analytique ) :

### A. vecteur normal :

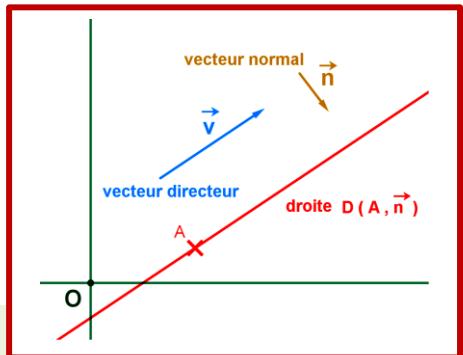
#### 01. Activité :

$D(A, \vec{u})$  est une droite dans le plan  $(P)$  . Que remarquez-vous ?

#### 02. Définition :

$D(A, \vec{u})$  est une droite dans le plan  $(P)$  .

Tout vecteur  $\vec{n}$  non nul orthogonal au vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite  $D(A, \vec{u})$  s'appelle vecteur normal à la droite  $D(A, \vec{u})$  .



#### 03. remarque :

- Les vecteurs  $\alpha \vec{n}$  ( avec  $\alpha \neq 0$  ) sont normaux à la droite  $D(A, \vec{u})$  .
- $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont normaux à la droite  $D(A, \vec{u})$  donc  $\vec{n}$  et  $\vec{n}'$  sont colinéaires .
- $\vec{n}(a, b)$  normal à la droite  $(D)$  équivaut  $\vec{u}(-b, a)$  est un vecteur directeur à la droite  $(D)$  .

### B. Ensemble des points M tel que $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$

#### 01. Activité :

$A$  est un point de  $(P)$  et  $\vec{n}$  est un vecteur non nul de  $(P)$  .

1. Déterminer l'ensemble des points  $M(x, y)$  de  $(P)$  tel que  $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$  .

#### 02. Propriété :

l'ensemble des points  $M(x, y)$  de  $(P)$  tel que  $\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0$  est la droite  $D(A, \vec{n})$  passant par  $A$  dont le vecteur normal est  $\vec{n}$  .

### C. Equation cartésienne de la droite $D(A, \vec{n})$ :

#### 01. Activité :

$D(A, \vec{u})$  est une droite dans le plan  $(P)$  tel que  $A(x_A, y_A)$  et  $\vec{n}(a, b)$  est un vecteur normal de  $D(A, \vec{u})$  ;  $M(x, y)$  est un point de  $(P)$  .

1. Montrer que :  $M(x, y) \in D(A, \vec{n}) \Rightarrow ax + by + c = 0$  ; on détermine  $c$  .

2. On étudier la réciproque :  $E$  est l'ensemble des points  $M(x, y)$  de  $(P)$  tel que  $ax + by + c = 0$  avec  $(a, b) \neq (0, 0)$  montrer que l'ensemble  $E$  est la droite  $D(A, \vec{n})$  .

#### 02. Propriété et définition :

- $M(x, y)$  est un point de  $(P)$  appartient à la droite  $D(A(x_A, y_A), \vec{n}(a, b))$  si et seulement si  $ax + by + c = 0$  et  $(a, b) \neq (0, 0)$  et  $c = -ax_A - by_A$  .
- $ax + by + c = 0$  s'appelle l'équation cartésienne de la droite  $D(A, \vec{n})$

### 03. Remarque :

Pour l'équation cartésienne  $(D) : ax + by + c = 0$  on a :

- $\vec{n}(a, b)$  vecteur normal à la droite  $(D)$  .
- $\vec{u}(-b, a)$  vecteur directeur à la droite  $(D)$  .

### 04. Application :

1. Donner l'équation cartésienne de la droite  $D\left(A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$  .

2. On considère le triangle ABC tel que  $A(2,1)$  et  $B(0,1)$  et  $C(-2,3)$  .

a. Déterminer les équations cartésiennes du la médiatrice de  $[AB]$  et  $[AC]$  .

b. Déterminer  $\Omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

Correction :

1. Equation cartésienne de la droite  $D\left(A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$  . On a :

- $\vec{n}(1,5)$  est un vecteur normal à la droite  $(D)$  donc une équation est de la forme  $(D) : 1x + 5y + c = 0$  .
- Le point  $A \in (D)$  donc :  $A(2,0) \in (D) : 1 \times 2 + 5 \times 0 + c = 0$  d'où  $c = -2$ .

Conclusion : Equation cartésienne est  $(D) : 1x + 5y - 2 = 0$  .

2. les équations cartésiennes du la médiatrice de  $[AB]$  et  $[AC]$  .

a. Equation cartésienne de  $(D_1)$  la médiatrice de  $[AB]$  .

- $(D_1)$  médiatrice de  $[AB]$  donc  $(AB) \perp (D_1)$  d'où  $\overrightarrow{AB}$  est normal à la droite  $(D_1)$  .
- $I(1,1)$  est le milieu de  $[AB]$  donc  $(D_1)$  passe par  $I$  .

D'où :  $M(x;y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0$$

Donc :  $(D_1) : x-1=0$

b. Equation cartésienne de  $(D_2)$  la médiatrice de  $[AC]$  .

- $(D_2)$  médiatrice de  $[AC]$  donc  $(AC) \perp (D_2)$  d'où  $\overrightarrow{AC}$  est normal à la droite  $(D_2)$  .
- $J(-1,2)$  est le milieu de  $[AC]$  donc  $(D_2)$  passe par  $J$  .

D'où :  $M(x;y) \in (D') \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) + 2(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2y - 6 = 0$$

Donc :  $(D_2) : -x + y - 3 = 0$

b. On détermine  $\Omega$  le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

On sait que l'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \Omega(x, y) \in (D) \cap (D') &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ -x + y - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où :  $\Omega(1, 4)$  .

Conclusion :  $\Omega(1, 4)$  est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

D. Orthogonalité de deux droites  $(D)$  et  $(D')$  :

**01.** Activité :

1.  $D(A, \vec{u})$  et  $D'(B, \vec{u}')$  deux droites de  $(P)$  dont-on a les vecteurs directeur .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que  $(D') \perp (D)$  .

2.  $D(A, \vec{n})$  et  $D'(B, \vec{n}')$  deux droites de  $(P)$  dont-on a les vecteurs normaux .

Déterminer une condition nécessaire et suffisante tel que  $(D') \perp (D)$  .

**02.** Propriété :

On considère les droites  $(D)$  et  $(D')$  d'équations cartésiennes :  $(D) : ax + by + c = 0$  et

$(D') : a'x + b'y + c' = 0$  tel que  $\vec{n}(a, b)$  et  $\vec{n}'(a', b')$  sont les vecteurs normaux respectivement à

$(D)$  et  $(D')$  . on a :  $(D') \perp (D) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$  .

**03.** Application :

Déterminer une équation cartésienne d'une droite  $(D')$  orthogonale à  $(D)$  tel que :

$(D) : 2x + y - 3 = 0$  .

E. Distance d'un point à une droite  $(D)$  .

**01.** Activité :

Comment on détermine la plus proche distance du point A à la droite  $(D)$  .

**02.** Définition :

$D(A, \vec{u})$  est une droite du plan  $(P)$  et A est un point de  $(P)$  et H sa projection orthogonale sur  $(D)$  . la distance AH est appelée la distance de A à  $(D)$  et on note  $d(A, (D)) = d = AH$  .

**03.** Activité :

$D(A, \vec{u})$  est une droite du plan  $(P)$  tel que son équation cartésienne est  $(D) : ax + by + c = 0$  et A  $(x_A, y_A)$  est un point de  $(P)$  et H  $(x_H, y_H)$  sa projection orthogonale sur  $(D)$  .

1. Montrer que  $c = -ax_H - by_H$  puis  $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = |ax_A + by_A + c|$  .

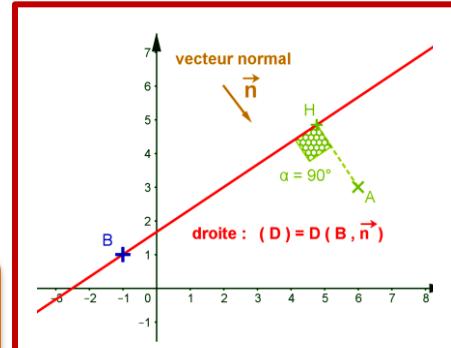
2. Montrer que  $|\vec{n} \cdot \vec{AH}| = |ax_A + by_A + c|$  .

3. On déduit  $AH$  en fonction de  $a$  et  $b$  et  $x_A$  et  $y_A$  .

#### 04. Propriété :

La distance du point  $A(x_A, y_A)$  de  $(P)$  à une droite d'équation

cartésienne  $(D)$  :  $ax + by + c = 0$  est :  $d(A; D) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  .



#### 05. Exemple :

$(D'): -x + y - 3 = 0$  et  $A(2, 5)$  on a  $d(A; D) = \frac{|-2 + 5 - 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = 0$  donc  $A \in (D)$  .

### V. Le cercle étude analytique :

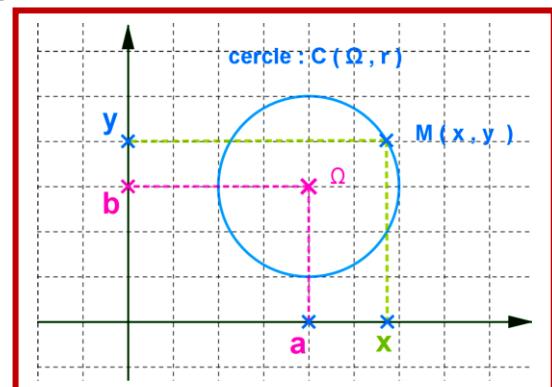
A. Equation cartésienne du cercle  $C(\Omega(a, b); r)$  .

#### 01. Activité :

$\Omega(a, b)$  est un point de  $(P)$  et  $r \in \mathbb{R}^{+*}$  ,  $(r > 0)$  .

1. Compléter l'équivalence suivant on utilise  $a$  et  $b$  et  $x$  et  $y$

$$M(x, y) \in C(\Omega(a, b); r) \Leftrightarrow \dots \dots \dots$$



#### 02. Propriété :

Tout cercle  $C(\Omega(a, b); r)$  du plan  $(P)$  a pour équation cartésienne de la forme  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  ou encore :  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  avec  $c = a^2 + b^2 - r^2$  .

#### 03. Exemple :

• Donner équation cartésienne du cercle  $C(\Omega(0, 0); 1)$  .

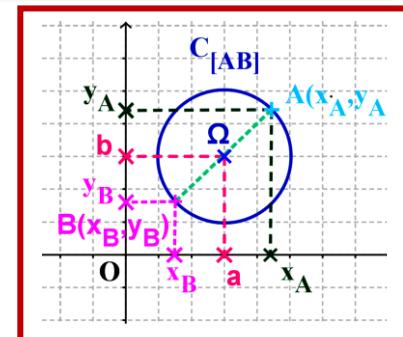
• Donner équation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$

avec :  $A(1; 0)$  et  $B(-1; 0)$  .

B. Equation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$  .

#### 01. Activité :

$M(x; y)$  est un point de  $(P)$  ;  $C_{[AB]}$  est cercle de diamètre  $[AB]$  avec  $A \neq B$  .



1. Trouver une condition nécessaire et suffisante de  $M(x; y) \in C_{[AB]}$

#### 02. Propriété :

Equation cartésienne du cercle de diamètre  $[AB]$  est :  $M(x; y) \in C[A; B] \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$  .

#### 03. Exemple :

$A(1; 0)$  et  $B(-1; 0)$  deux points de  $(P)$  . trouver équation cartésienne de  $C_{[AB]}$  .

Correction : On trouve équation cartésienne de  $C_{[AB]}$  .

On a :  $M(x; y) \in C_{[A; B]} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$  .

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Conclusion :  $C_{[AB]} : x^2 + y^2 - 1 = 0$  .

### C. Le cercle passant par trois points :

Le cercle passant par trois A et B et C non alignés c'est le cercle circonscrit au triangle ABC tel que son centre  $\Omega$  est l'intersection des médiatrices et son rayon est  $r = \Omega A$  .

### D. Présentation paramétrique d'un cercle :

#### 01. Activité :

$C(\Omega(a,b);r)$  est un cercle du plan  $(P)$  rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\theta \in \mathbb{R}$  ;

$$(\vec{i}, \vec{\Omega M}) \equiv \theta : (2\pi)$$

1. Calculer :  $\vec{J} \cdot \vec{\Omega M}$  ;  $\vec{i} \cdot \vec{\Omega M}$  .

2. Déterminer les coordonnées du point M par rapport au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

3. D'après  $\vec{\Omega M} = \vec{\Omega O} + \vec{\Omega M}$  , montrer que :  $\begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$  .

#### 02. Propriété :

$C(\Omega(a,b);r)$  est un cercle du plan  $(P)$  rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  tel que  $\theta \in \mathbb{R}$  ;

$$(\vec{i}, \vec{\Omega M}) \equiv \theta : (2\pi) ; \text{ pour tout } M(x,y) \text{ du plan } (P) \text{ on a : } \begin{cases} x = a + R \cos \theta \\ y = b + R \sin \theta \end{cases}$$

On l'appelle présentation paramétrique d'un cercle  $C(\Omega(a,b);r)$  .

#### 03. Exemple :

Donner présentation paramétrique d'un cercle trigonométrique lié au repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (  $C(O(0,0);1)$  )

E. Etude l'ensemble des points :  $\{M(x,y) / x^2 + y^2 + ax + by + c = 0\}$  . avec a et b et c de  $\mathbb{R}$

#### 01. Activité :

1. Trouver l'ensemble des points  $M(x,y)$  du plan  $(P)$  qui vérifie  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  .

2. Donner la propriété

#### 02. Propriété :

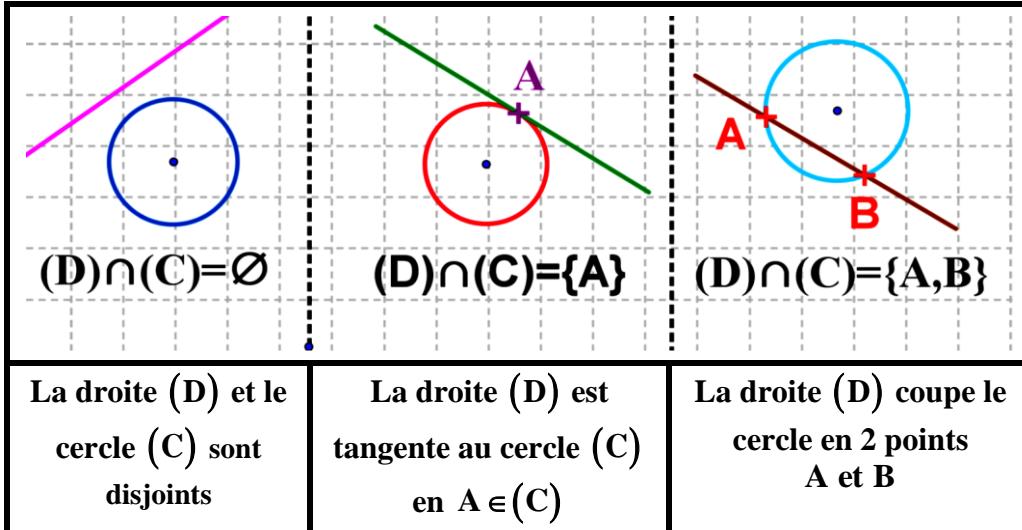
l'ensemble des points  $M(x,y)$  du plan  $(P)$  qui vérifie  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  est :

- Si  $A = a^2 + b^2 - 4c < 0$  on a :  $S = \emptyset$  .
- Si  $A = a^2 + b^2 - 4c = 0$  on a :  $S = \left\{ \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right) \right\}$  ( un point et un seul qui est  $\Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right)$  )
- Si  $A = a^2 + b^2 - 4c > 0$  on a :  $S = \{C\} = C \left( \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2} \right); r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2} \right)$  ( un cercle ) .

## F. Etude les positions relatives d'un cercle et une droite .

### 01. Activité :

Tracer les positions relatives d'une droites (D) et un cercle (C) , puis donner les définitions et les propriétés .



### 02. Définitions et propriétés :

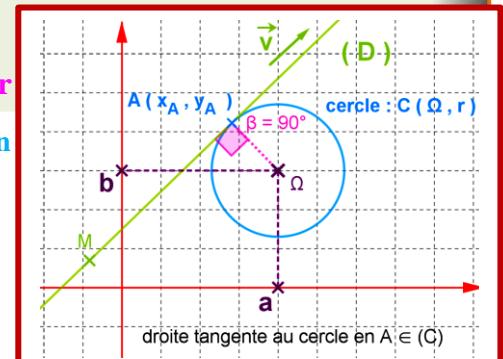
(D) est une droite du plan (P) et (C) est un cercle du plan (P) de centre  $\Omega$  et de rayon  $r$  .

- (D) est à l'extérieur du cercle (C) ( (D) et (C) sont disjoints  $(D) \cap (C) = \emptyset$  ) .
- (D) coupe le cercle (C) si et seulement si  $d(\Omega, (D)) > r$
- (D) coupe le cercle (C) en deux points A et B  $( (D) \cap (C) = \{A, B\} )$  .
- (D) coupe le cercle (C) si et seulement si  $d(\Omega, (D)) < r$
- (D) est tangente au cercle (C)  $( (D) \cap (C) = \{A\} )$  .
- (D) est tangente au cercle (C) si et seulement si  $d(\Omega, (D)) = r$

### G. Equation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point A du cercle .

### 01. Activité :

$D(A, \vec{u})$  est une droite du plan (P) et A est un point d'un cercle  $C(\Omega, r)$  tel que (D) est tangente à (C) .



1. Trouver condition nécessaire et suffisante tel que  $M(x, y)$  appartienne à (D) .

2. On déduit l'équation cartésienne de  $D(A, \vec{u})$  ; puis donner la propriété .

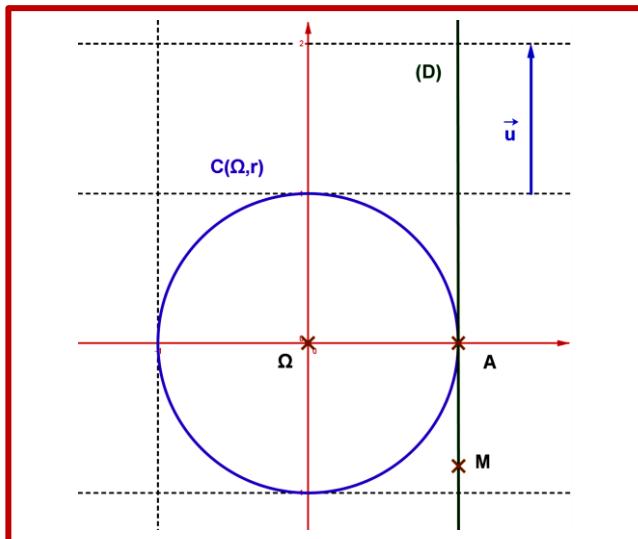
### 02. Propriété :

l'équation cartésienne de la droite  $D(A, \vec{u})$  tangente au cercle  $C(\Omega, r)$  en un point  $A(x_A, y_A)$  de

$C(\Omega, r)$  est :  $\vec{\Omega A} \cdot \vec{u} = 0$  ou encore  $\begin{pmatrix} x_A - a \\ y_A - b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = 0$  .

### 03. Exemple :

Géométriquement donner l'équation cartésienne de la droite  $D(A; \vec{u})$  qui tangente au cercle  $(C)$ .



VI. Ensemble des points  $M$  du plan  $(P)$  tel que :  $MA^2 - MB^2 = k$  ;  $MA^2 + MB^2 = k$  ; avec  $k \in \mathbb{R}$ .

$A$  et  $B$  deux points de  $(P)$  tel que :  $AB = 6$  et  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .

1<sup>er</sup> cas :  $MA^2 + MB^2 = k$ .

1. Déterminer  $(G_1)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 + MB^2 = 68$ .

2. Déterminer  $(G_2)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 + MB^2 = 18$ .

3. Déterminer  $(G_3)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 + MB^2 = 4$ .

2<sup>ième</sup> cas :  $MA^2 - MB^2 = k$ .

1. Déterminer  $(H_1)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 - MB^2 = 0$ .

2. Déterminer  $(H_2)$  l'ensemble des points  $M$  de  $(P)$  tel que  $MA^2 - MB^2 = 36$ .

▲ Remarque :

On peut étudier les 2 cas précédents dans le cas général c.à.d.  $k \in \mathbb{R}$  et  $AB$  et on discute avec disjonction des cas.