

Chapitre 4

Analytique du produit scalaire

Dans tout le chapitre, \vec{u} et \vec{v} désignent deux vecteurs du plan.
Une unité de longueur est fixée.

I/ Définition

Définition

On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Le produit scalaire d'un vecteur \vec{u} par lui-même ($\vec{u} \cdot \vec{u}$) est appelé carré scalaire de \vec{u} et se note \vec{u}^2 .

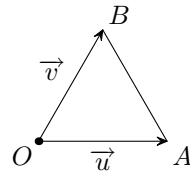
Remarque : Le produit scalaire est donc une opération dont les arguments sont des vecteurs et dont le résultat est réel.

Exemple : Sur la figure ci-contre, le triangle OAB est équilatéral et $OA = 2$.

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

On a $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 2$ et $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

Ainsi $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$



II/ Autres expressions du produit scalaire

a) Cas des vecteurs colinéaires

Propriété

– Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

– Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraires alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

Démonstration

– Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens alors $(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 0 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

– Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de sens contraires, alors $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi$

Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \pi = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Conséquences :

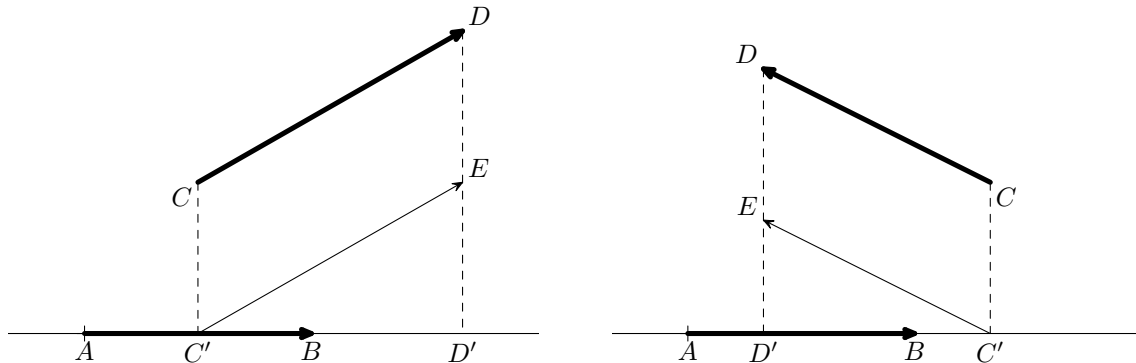
- Si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et de même sens alors $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$ et si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires et sens contraires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$
- Quel que soit le vecteur \vec{u} , $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

b) Avec des projetés orthogonaux

Propriété

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur (AB) alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$



Démonstration

Soit E le point tel que $\overrightarrow{C'E} = \overrightarrow{CD}$.

On a alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'E} = AB \times C'E \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E})$.

- Si l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E})$ est droit alors $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E}) = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} = 0$.

- Si l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E})$ est aigu alors \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et de même sens et $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E}) = \frac{C'D'}{C'E}$

Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times C'E \times \frac{C'D'}{C'E} = AB \times C'D' = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

- Si l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E})$ est obtus alors \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{C'D'}$ sont colinéaires et de sens contraires et $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E}) = -\frac{C'D'}{C'E}$

Ainsi $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times C'E \times \frac{C'D'}{C'E} = -AB \times C'D' = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.

Exemple : ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 3$ et $BC = 4$.

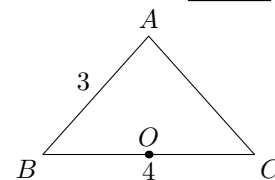
O est le milieu du segment $[BC]$. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Le projeté orthogonal de A sur (BC) est O donc

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = BO \times BC = 2 \times 3 = 6$$

Le projeté orthogonal de A sur (BC) est O donc

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{BC} = -CO \times BC = -2 \times 3 = -6$$



c) Dans un repère

Propriété

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Démonstration

Soit A le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et B le point tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

1/ Cas des vecteurs colinéaires.

Il existe k tel que $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$. Ainsi $\overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

– Si \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont colinéaires et de même sens alors $k > 0$ et $OB = kOA$.

On a alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$.

– Si \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont colinéaires et de même sens contraire alors $k < 0$ et $OB = -kOA$.

On a alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$.

Ainsi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = k(x^2 + y^2) = kxx + kyy = xx' + yy'$

2/ Cas des vecteurs quelconques.

Soit H le projeté orthogonal de B sur (OA) .

On a alors, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = xx_H + yy_H$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles OBH et ABH rectangles en H , on obtient :

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = AB^2 - AH^2$$

ce qui nous donne :

$$x'^2 + y'^2 - x_H^2 - y_H^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 - (x - x_H)^2 - (y - y_H)^2$$

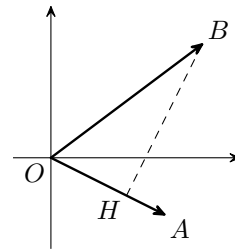
puis, en simplifiant :

$$0 = -2xx' - 2yy' + 2xx_H + 2yy_H$$

soit :

$$xx_H + yy_H = xx' + yy'$$

On en déduit donc : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = xx' + yy'$.



Exemple : Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 3 + 3 \times (-1) = 18 - 3 = 15$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 6 \times (-2) + 3 \times 2 = -12 + 6 = -6$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \times (-2) + (-1) \times 2 = -6 - 2 = -8$$

III/ Règles de calcul

Propriété

Quels que soient \vec{u} et \vec{v} :

$$-\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$$

$$-\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad (\text{On dit que le produit scalaire est symétrique})$$

$$-\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \text{ et } \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$-(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \text{ et } (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

Démonstration

– Le premier résultat est une conséquence directe de la définition.

– Le deuxième résultat est aussi une conséquence de la définition ($\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(\vec{v}; \vec{u})$).

- On se place dans un repère orthonormal du plan et on pose $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et

$$\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $\vec{v} + \vec{w}$ sont $\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$.

On a ainsi, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy''$.

De plus $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + xx'' + yy''$.

Conclusion : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Les coordonnées de $k\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$.

On a ainsi $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = x(kx') + y(ky') = kxx' + kyy'$.

De plus $k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = k(xx' + yy') = kxx' + kyy'$

Conclusion $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

- Le quatrième résultat se démontre en utilisant les deux précédents.

Exemple : \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs, simplifier $(\vec{u} + \vec{v})^2$, $(\vec{u} - \vec{v})^2$ et $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$.

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v})^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u}^2 + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v})^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} \\ &= \vec{u}^2 - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \end{aligned}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

IV/ Vecteurs orthogonaux

a) Définition

Définition

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si :

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (OA) \perp (OB)$$

b) Propriété

Propriété

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \end{aligned}$$

Exemple : Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$.

Démontrer que \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 6 + 4 \times (-9) = 36 - 36 = 0$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont donc orthogonaux.