

## Chapitre 4

# Analytique du produit scalaire

Dans tout le chapitre,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  désignent deux vecteurs du plan.  
Une unité de longueur est fixée.

### I/ Définition

#### Définition

On appelle produit scalaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le nombre réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \end{cases}$$

Le produit scalaire d'un vecteur  $\vec{u}$  par lui-même ( $\vec{u} \cdot \vec{u}$ ) est appelé carré scalaire de  $\vec{u}$  et se note  $\vec{u}^2$ .

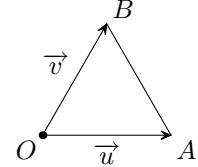
Remarque : Le produit scalaire est donc une opération dont les arguments sont des vecteurs et dont le résultat est réel.

*Exemple : Sur la figure ci-contre, le triangle OAB est équilatéral et  $OA = 2$ .*

*Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .*

On a  $\|\vec{u}\| = 2$ ,  $\|\vec{v}\| = 2$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$

Ainsi  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$



### II/ Autres expressions du produit scalaire

#### a) Cas des vecteurs colinéaires

#### Propriété

– Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

– Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraires alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

#### Démonstration

– Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens alors  $(\vec{u}; \vec{v}) = 0$

Ainsi,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos 0 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

– Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de sens contraires, alors  $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi$

Ainsi,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \pi = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

Conséquences :

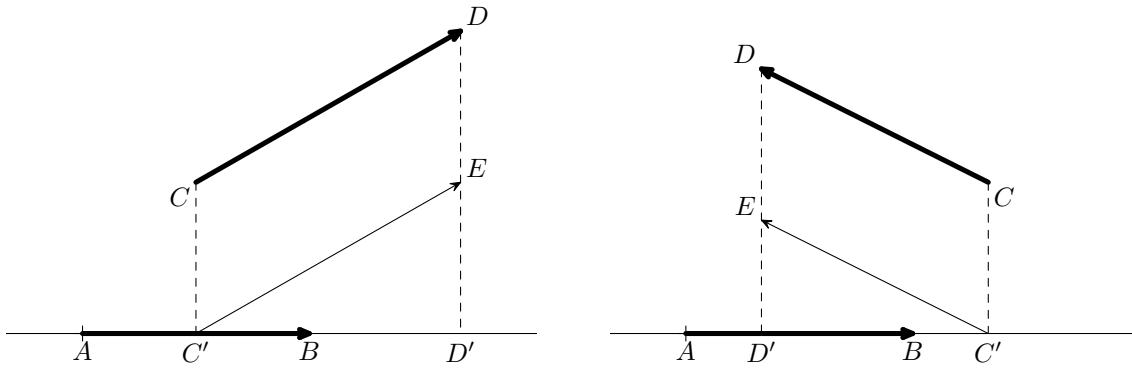
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et de même sens alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$  et si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires et sens contraires alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$
- Quel que soit le vecteur  $\vec{u}$ ,  $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$

### b) Avec des projets orthogonaux

#### Propriété

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points du plan.

Si  $C'$  et  $D'$  sont les projeté orthogonaux de  $C$  et  $D$  sur  $(AB)$  alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$



#### Démonstration

Soit  $E$  le point tel que  $\overrightarrow{C'E} = \overrightarrow{CD}$ .

On a alors  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'E} = AB \times C'E \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E})$ .

– Si l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E})$  est droit alors  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E}) = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) = 0$  donc  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} = 0$ .

– Si l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E})$  est aigu alors  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{C'D'}$  sont colinéaires et de même sens et  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E}) = \frac{\overrightarrow{C'D'}}{\overrightarrow{C'E}}$

Ainsi  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = AB \times C'E \times \frac{\overrightarrow{C'D'}}{\overrightarrow{C'E}} = AB \times C'D' = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ .

– Si l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E})$  est obtus alors  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{C'D'}$  sont colinéaires et de sens contraires et  $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{C'E}) = -\frac{\overrightarrow{C'D'}}{\overrightarrow{C'E}}$

Ainsi  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -AB \times C'E \times \frac{\overrightarrow{C'D'}}{\overrightarrow{C'E}} = -AB \times C'D' = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ .

Exemple :  $ABC$  est un triangle isocèle en  $A$  tel que  $AB = 3$  et  $BC = 4$ .

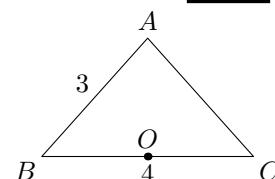
$O$  est le milieu du segment  $[BC]$ . Calculer  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

Le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$  est  $O$  donc

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC} = BO \times BC = 2 \times 3 = 6$$

Le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$  est  $O$  donc

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{BC} = CO \times BC = -2 \times 3 = -6$$



### c) Dans un repère

#### Propriété

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormal du plan.

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ .

*Démonstration*

Soit  $A$  le point tel que  $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$  et  $B$  le point tel que  $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ .

1/ Cas des vecteurs colinéaires.

Il existe  $k$  tel que  $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ . Ainsi  $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ .

– Si  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$  sont colinéaires et de même sens alors  $k > 0$  et  $OB = kOA$ .

On a alors  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$ .

– Si  $\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OB}$  sont colinéaires et de même sens contraire alors  $k < 0$  et  $OB = -kOA$ .

On a alors  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OB = k \times OA \times OA = kOA^2$ .

Ainsi  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = k(x^2 + y^2) = kxx + kyy = xx' + yy'$

2/ Cas des vecteurs quelconques.

Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $(OA)$ .

On a alors, d'après ce qui précède,

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} = xx_H + yy_H$$

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles  $OBH$  et  $ABH$  rectangles en  $H$ , on obtient :

$$BH^2 = OB^2 - OH^2 = AB^2 - AH^2$$

ce qui nous donne :

$$x'^2 + y'^2 - x_H^2 - y_H^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 - (x - x_H)^2 - (y - y_H)^2$$

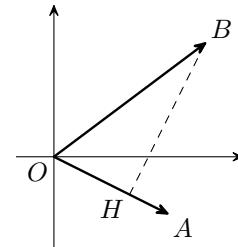
puis, en simplifiant :

$$0 = -2xx' - 2yy' + 2xx_H + 2yy_H$$

soit :

$$xx_H + yy_H = xx' + yy'$$

On en déduit donc :  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = xx' + yy'$ .



*Exemple :* Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ,  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 3 + 3 \times (-1) = 18 - 3 = 15$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 6 \times (-2) + 3 \times 2 = -12 + 6 = -6$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \times (-2) + (-1) \times 2 = -6 - 2 = -8$$

### III/ Règles de calcul

**Propriété**

Quels que soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

–  $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$

–  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  (On dit que le produit scalaire est symétrique)

–  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

–  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$  et  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

*Démonstration*

– Le premier résultat est une conséquence directe de la définition.

– Le deuxième résultat est aussi une conséquence de la définition ( $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \cos(\vec{v}; \vec{u})$ ).

- On se place dans un repère orthonormal du plan et on pose  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$

Les coordonnées de  $\vec{v} + \vec{w}$  sont  $\begin{pmatrix} x' + x'' \\ y' + y'' \end{pmatrix}$ .

On a ainsi,  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = xx' + xx'' + yy' + yy''$ .

De plus  $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + xx'' + yy''$ .

Conclusion :  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

Les coordonnées de  $k\vec{v}$  sont  $\begin{pmatrix} kx' \\ ky' \end{pmatrix}$ .

On a ainsi  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = x(kx') + y(ky') = kxx' + kyy'$ .

De plus  $k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = k(xx' + yy') = kxx' + kyy'$

Conclusion  $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$

- Le quatrième résultat se démontre en utilisant les deux précédents.

*Exemple :  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont deux vecteurs, simplifier  $(\vec{u} + \vec{v})^2$ ,  $(\vec{u} - \vec{v})^2$  et  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ .*

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

$$= \vec{u}^2 + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v}$$

$$= \vec{u}^2 - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v}^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

## IV / Vecteurs orthogonaux

### a) Définition

#### Définition

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si :

$$\vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (OA) \perp (OB)$$

### b) Propriété

#### Propriété

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

#### Démonstration

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \text{ ou } \|\vec{v}\| = 0 \text{ ou } \cos(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ ou } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k \times 2\pi \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \end{aligned}$$

*Exemple : Dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , on donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ .*

*Démontrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.*

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 \times 6 + 4 \times (-9) = 36 - 36 = 0$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont donc orthogonaux.