

PRODUIT SCALAIRe DANS \mathcal{V}_2

Etude analytique (2) -Applications- : cercle

Dans tout ce qui va suivre le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

I) EQUATION D'UN CERCLE

Définition : Soient Ω un point et r un réel positif, le cercle de centre Ω et de rayon r est l'ensemble des points M dans le plan (\mathcal{P}) qui vérifient : $\Omega M = r$ on le note, $\mathcal{C}(\Omega, r) : C(\Omega; r) = \{M \in (\mathcal{P}) / \Omega M = r\}$

Remarque : On peut considérer le point comme étant un cercle de rayon nul.

1) Cercle défini par son centre et son rayon.

Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif,

$$M(x, y) \in C(\Omega; r) \Leftrightarrow \Omega M = r$$

$$\Leftrightarrow \Omega M^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Exemple : déterminer l'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(-1; 2)$ et de rayon $r=3$

Solution : l'équation cartésienne du cercle est :

$$\mathcal{C}(\Omega, r) : (x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

$$\text{C a d : } x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

Propriété : Soient $\Omega(a, b)$ un point et r un réel positif, le cercle $\mathcal{C}(\Omega, r)$ à une équation cartésienne de la forme : $\mathcal{C}(\Omega, r) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

2) Equation réduite d'un cercle

On a : $M(x, y) \in \mathcal{C}(\Omega, r) \Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \text{ où : } \alpha = -2a ; \beta = -2b \text{ et } \gamma = a^2 + b^2 - r^2$$

Propriété1 : Tout cercle dans le plan à une équation de la forme : $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ où α, β et γ sont des réels.

Propriété2 : Soit (C) L'ensemble des points

$M(x, y)$ du plan tel que :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

avec $a ; b ; c$ des réelles

- Si : $a^2 + b^2 - c > 0$

alors (C) est une cercle de centre

$\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

- Si : $a^2 + b^2 - c = 0$ alors $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

- Si : $a^2 + b^2 - c < 0$ alors $(C) = \emptyset$

PREUVE : $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + c - a^2 - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c = 0$$

- Si : $a^2 + b^2 - c > 0$ alors (C) est une cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

- Si : $a^2 + b^2 - c = 0$ alors $(C) = \{\Omega(a; b)\}$

- Si : $a^2 + b^2 - c < 0$ alors $(C) = \emptyset$

Exemples : Déterminer L'ensemble (E) dans les cas suivants :

$$1) (E) : x^2 + y^2 - x + 3y - 4 = 0$$

$$2) (E) : x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$$

$$3) (E) : x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0$$

Solutions : 1) $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{3}{2}; c = -4$

$$\text{On a : } a^2 + b^2 - c = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - (-4) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 4 = \frac{13}{2} > 0$$

$$\text{Donc : } \Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right) \text{ donc } \Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right)$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

alors (E) : est une cercle de centre

$$\Omega\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}\right) \text{ et de rayon } \frac{\sqrt{26}}{2}$$

$$2) a = 3; b = -1; c = 10 \quad a^2 + b^2 - c = 3^2 + (-1)^2 - 10 = 9 + 1 - 10 = 0$$

$$\text{alors } (E) = \{\Omega(3; -1)\}$$

$$3) a = 2; b = 0; c = 5$$

$$a^2 + b^2 - c = 4 - 5 = -1 < 0 \text{ alors } (E) = \emptyset$$

3) Cercle définie par son diamètre.

Propriété : (Rappelle)

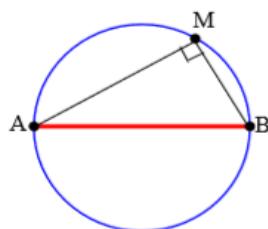
Soient A et B deux points distincts dans le plan l'ensemble des points M

qui vérifient $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$. Ce qui nous permet d'énoncer la propriété suivante :

Propriété : Soient $A(x_A; y_A)$

et $B(x_B; y_B)$ deux points distincts dans le plan, le cercle de diamètre $[AB]$ à pour équation :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$



Exemple : Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(1; 2)$ et $B(-3; 1)$

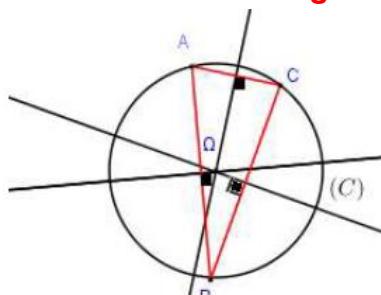
solution : $M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

$$\overrightarrow{MA}(1-x; 2-y) \text{ et } \overrightarrow{MB}(-3-x; 1-y)$$

$$M(x; y) \in (C) \Leftrightarrow (-3-x)(1-x) + (1-y)(2-y) = 0$$

$$\text{Donc : } (C) : x^2 + y^2 + 2x - 3y - 1 = 0$$

4) cercle définie par trois points ou Cercle circonscrit à un triangle



Soit ABC un triangle, les médiatrices du triangle ABC se coupent en Ω le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC

Exemple : le plan (P) est rapporté à un repère

$R(O; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$$A(2; 3) \quad B(0; 1) \quad C(-4; 5) \quad E(5; 2) \quad F(2; 4)$$

1) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC .

2) Ecrire l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF . **Solution :** 1) Soient $I(1; 2)$ et $J(-1; 4)$ le milieu respectivement du segments : $[AB]$ et $[AC]$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[AB]$ donc (Δ) passe par $I(1; 2)$ et \overrightarrow{AB} un vecteur normal a (Δ)

Et on a : $\overrightarrow{AB}(-2; -2)$ donc une équation de (Δ) est :

$$(\Delta) : -2(x-1) - 2(y-2) = 0$$

$$\text{Donc : } (\Delta) : -2x + 2 - 2y + 4 = 0 \text{ donc } (\Delta) : -2x - 2y + 6 = 0$$

donc $(\Delta) : x + y - 3 = 0$ (après simplifications)

Et soit (Δ') la médiatrice de $[AC]$ donc (Δ') passe par $J(-1; 4)$ et \overrightarrow{AC} un vecteur normal a (Δ') et on a : $\overrightarrow{AC}(-6; 2)$ donc une équation de (Δ') est :

$$(\Delta') : -6(x+1) + 2(y-4) = 0 \text{ donc : } (\Delta') : 3x - y + 7 = 0$$

On a Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (Δ') on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} (\Delta) : x + y - 3 = 0 \\ (\Delta') : 3x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $(-1; 4)$ donc

$\Omega(-1; 4)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est :

$$r = A\Omega = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{Et l'équation du cercle est : } (x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$$

$$(C) : x^2 + y^2 + 2x - 8y + 7 = 0$$

2) déterminons l'équation du cercle circonscrit au triangle OEF .

On sait que l'équation du cercle s'écrit sous la forme :

$$(C') : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Et on a : $O \in (C') \Leftrightarrow c = 0$

$$E(5; 2) \in (C') \Leftrightarrow 25 + 4 - 10a - 4b = 0$$

$$F(2; 4) \in (C') \Leftrightarrow 4 + 16 - 4a - 8b = 0$$

on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 10a + 4b = 29 \\ a + 2b = 5 \\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{19}{8} \\ b = \frac{21}{16} \\ c = 0 \end{cases}$$

Et l'équation du cercle est :

$$(C') : x^2 + y^2 - \frac{19}{4}x - \frac{21}{8}y = 0$$

II) L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR D'UN CERCLE.

Définition : Soit $C(\Omega; r)$ un cercle dans le plan.

a) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M \leq r$ s'appelle la boule fermée de centre Ω et de rayon r , il s'appelle aussi l'intérieur du cercle $C(\Omega; r)$

b) L'ensemble des points M dans le plan qui vérifient $\Omega M > r$ s'appelle l'extérieur du cercle $C(\Omega; r)$

Application : La résolution graphique de quelques systèmes d'inéquation

Exemple : Nous allons résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} < 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4 > 0 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + \frac{11}{4} = 0$$

est l'équation du cercle (C)

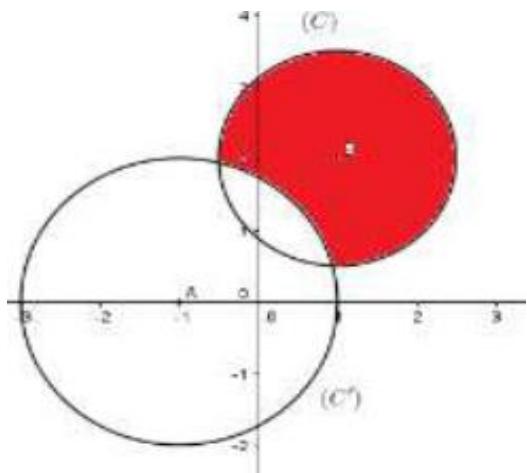
de centre $B(1,2)$ et de rayon $r = \frac{3}{2}$

$x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ est l'équation du cercle (C')

de centre $A(-1,0)$ et de rayon $r' = 2$.

L'ensemble des points M qui vérifient (S) est

l'extérieur de (C') intersection l'intérieur de (C)



Exercice1 : résoudre graphiquement le système :

$$(S) \begin{cases} (1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \\ (2): x - y - 1 > 0 \end{cases}$$

Solution :

- $(1): x^2 + y^2 - 4x < 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 < 2^2$

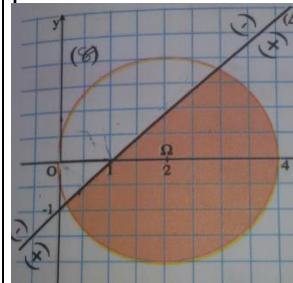
Donc les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x; y)$ des points qui se trouvent à l'intérieurs du cercle (C) de centre $\Omega(2; 0)$ et de rayon $r = 2$

- $(2): x - y - 1 > 0$: les solutions de cette inéquation c'est les couples $(x; y)$ des points qui se trouvent au-dessous de la droite d'équation : $(\Delta): x^2 + y^2 - 4x = 0$

(demi plan qui contient $\Omega(2; 0)$)

Car : $2 - 0 - 1 = 1 > 0$

Finalement l'ensemble des solutions du système c'est les couples $(x; y)$ des points qui appartiennent à la partie colorée.



Exercice2 : Résoudre graphiquement

$$(x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9)(2x - y + 1) \leq 0$$

III) POSITIONS RELATIVES D'UN CERCLE EST D'UNE DROITE.

1) Propriété

Soit $C(O; r)$ un cercle de rayon r strictement positif et (D) une droite dans le plan. Pour étudier les positions relatives du cercle $C(O; r)$ de (D) , il suffit de déterminer la distance de O à (D) . soit H la projection orthogonale de O sur (D)

1) Si $d(O; (D)) = OH > r$

Soit M un point de la droite (D) on a :

$OM \geq OH > r$ donc tout point de la

droite (D) est strictement à

L'extérieure du cercle (C)

$$(C) \cap (D) = \emptyset$$

2) $d(O; (D)) = OH = r$

Puisque $OH = r$ alors H est un point commun entre (D) et (C) .

Soit M un point de la droite (D)

Different de H on a :

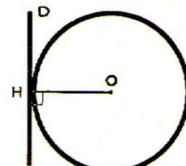
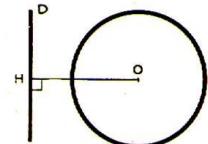
$$OM > OH = r$$

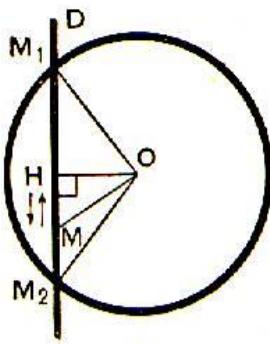
Donc tout point de la droite (D) différent de H est strictement à L'extérieure du cercle (C) .

$$(C) \cap (D) = \{H\}$$

On dit que la droite (D) est tangente au cercle (C) en H

3) $d(O, (D)) = OH < r$





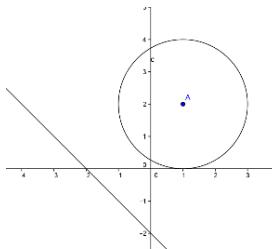
Dans ce cas le cercle (\mathcal{C}) et la droite (D) se coupent en deux points M_1 et M_2 et H est le milieu du segment $[M_1M_2]$

Exemple1 :Etudier la position du cercle de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation $(D): x + y + 2 = 0$

Solution : on calcul $d(\Omega, (P))$?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > R = 2$$

Donc : droite (D) est à l'extérieur du cercle (\mathcal{C})
 $(\mathcal{C}) \cap (D) = \emptyset$



Exemple2 :Etudier la position du cercle (\mathcal{C}) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 2$ avec la droite d'équation $(D): x - y + 2 = 0$

Solution : on calcul $d(\Omega, (P))$?

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} < R = 2$$

Donc : le cercle (\mathcal{C}) et la droite (D) se coupent en deux points A et B . Déterminons les coordonnées des points d'intersections ?

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2 + (y-2)^2 = (2)^2 \\ (2)x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

On a : $(2) \Leftrightarrow x + 2 = y$

On remplaçant dans (1) $y = x + 2$

On trouve : $(1)(x-1)^2 + (x+2-2)^2 = (2)^2$

$$\text{Donc : } (x-1)^2 + (x)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + x^2 = 4$$

$$\text{Donc : } 2x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Delta = 28$$

$$\text{Donc : } x_1 = \frac{2+2\sqrt{7}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{2-2\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{Donc : } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Si : } x_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} \text{ on remplace dans } x+2=y$$

$$\text{On trouve : } y_1 = \frac{1+\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5+\sqrt{7}}{2}$$

$$\text{Si : } x_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} \text{ on remplace dans } x+2=y$$

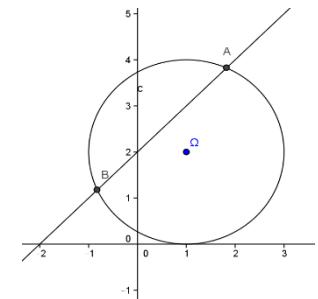
On trouve :

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{7}}{2} + 2 = \frac{5-\sqrt{7}}{2}$$

Donc : les points d'intersections sont :

$$A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}; \frac{5+\sqrt{7}}{2}\right) \text{ et}$$

$$B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$



Exemple3 :Etudier la position du cercle (\mathcal{C}) de centre $\Omega(1;2)$ et de rayon $R = 1$ avec la droite d'équation $(D): y = 3$

Solution : on calcul $d(\Omega, (P))$?

$$(D): 0x + 1y - 3 = 0$$

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|0+2-3|}{\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1}} = 1 = R$$

Donc : la droite (D) est tangente au cercle (\mathcal{C}) en A
 Déterminons les coordonnées du point d'intersection ou point de tangence ?

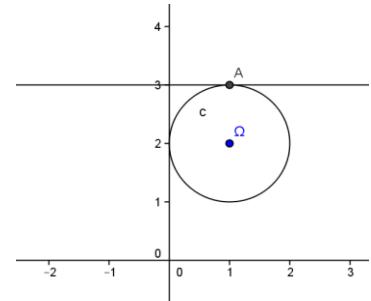
L'équation de (\mathcal{C}) est $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1^2$

On va résoudre le système suivant :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1)(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ (2)y = 3 \end{cases}$$

On remplaçant dans $y = 3$ dans (1)

On aura :



$$(1)(x-1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0$$

Donc : $x=1$ donc point de tangence est $A(1;3)$

2) Droite tangente à un cercle.

2.1 Définition

Dans tous ce qui suit le rayon du cercle est strictement positif.

Définition : Une droite (D) est dite tangente à un cercle (C) s'ils se coupent en un seul point.

Propriété : Une droite (D) est dite tangente au cercle $C (\Omega, r)$ si et seulement si $d (\Omega, (D)) = r$

2.2 Equation de la tangente à un cercle en un de ses points.

Soit $C (\Omega, r)$ un cercle dans le plan où $\Omega (a, b)$ et A l'un de ses points.

Soit la droite (T) la tangente à $C (\Omega, r)$ en A

$$M(x; y) \in (T) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$$

Propriété : Soient $\Omega (a, b)$ un point et $C (\Omega, r)$ un cercle dans le plan et A l'un de ses points. La droite (T) tangente à $C (\Omega, r)$ en A à pour équation :

$$(x - x_A)(y - y_A) + (a - x_A)(b - y_A) = 0$$

exemple : Soit (C) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \quad (1)$$

1)Vérifier que $A(0; 1) \in (C)$

2) Ecrire l'équation de la tangente au cercle (C) en A .

Solution : 1) On a : $0^2 + 1^2 - 4 \times 0 - 2 \times 1 + 1 = 0$

Donc $A(0; 1) \in (C)$

2)L'équation de la tangente au cercle (C) en A . ??

$$a = 2; b = 1; c = 1 : a^2 + b^2 - c = 2^2 + 1^2 - 1 = 4 > 0$$

Donc (C) cercle de centre $\Omega(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2})$ cad $\Omega(2; 1)$

$\overrightarrow{A\Omega}(-2; 0)$ et $\overrightarrow{AM}(x - 0; y - 1)$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$$

$$-2(x - 0) = 0 \Leftrightarrow -2(x - 0) + 0(y - 1) = 0 \Leftrightarrow M(x; y) \in (D)$$

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow x = 0$$

Donc : L'équation de la tangente au cercle (C) en A est : $(D) : x = 0$

Application : Soit (C) le cercle d'équation :

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 6 = 0$$

1)Vérifier que le point $A (3, -1)$ appartient au cercle

2- Ecrire l'équation de la tangente au cercle (C) en A .

2.3 Tangente à un cercle (C) passante par un point à l'extérieur de (C)

Exercice :

Soient le cercle (C): $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ et $A(5, 6)$

1- Vérifier que le point A est à l'extérieur de (C)

2- a) Déterminer l'équation de la droite (δ) passante par A et parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Vérifier que (δ) n'est pas tangente à (C).

3- Soit (Δ) une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta) y = mx + p$

a) Déterminer l'équation de (Δ) en fonction de m uniquement.

b) Déterminer m pour que (Δ) soit tangente au cercle (C).

4- Soit $B(4, 5)$

a) Montrer que la droite passante par B et parallèle à l'axe des ordonnées est tangente au cercle (C).

b) Soit (Δ') une droite qui passe par A et qui n'est pas parallèle à l'axe (Oy) et dont l'équation réduite est : $(\Delta') y = mx + p$; Déterminer m pour que (Δ') soit tangente au cercle (C).

2.3 Tangente à un cercle et de direction déterminée.

Soit (C) le cercle de centre $\Omega(-1, 2)$ et de rayon 3. Déterminer les équations des tangentes à (C) et de vecteur directeur $\vec{u}(-2; 1)$.

3) Equation paramétrique d'un cercle.

le plan (P) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.

Considérons (C) le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r . On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$ (1)

Si $M(x, y)$ dans \mathcal{R} et $M(X, Y)$ dans \mathcal{R}' où :

$$\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ et } \mathcal{R}'(O; \vec{i}, \vec{j})$$

Alors (1) se traduit analytiquement par : $\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$

or $\begin{cases} X = r \cos \alpha \\ Y = r \sin \alpha \end{cases}$ et par suite : $\begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases}$

Réiproquement l'ensemble

$$(C) = \left\{ M(x; y) \in (P) / \begin{cases} x = a + r \cos \alpha \\ y = b + r \sin \alpha \end{cases} \right\}$$

où a et b sont des réels et r un réel positif

est le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon r

Exemple1 : Déterminer l'équation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1; -2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$

Solution : l'équation paramétrique du cercle (C) de centre $\Omega(1; -2)$ et de rayon $r = \sqrt{2}$ est :

$$\begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \cos \theta \\ y = -2 + \sqrt{2} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

Exemple2 : Déterminer l'ensemble (C) des points

$M(x; y)$ du plan tel que :

$$\begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \text{ avec } (\theta \in \mathbb{R})$$

Solution : $\begin{cases} x - 3 = \sqrt{3} \cos \theta \\ y - 1 = \sqrt{3} \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{3} \cos \theta \\ y = 1 + \sqrt{3} \sin \theta \end{cases}$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{3} \cos \theta)^2 + (\sqrt{3} \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 3((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{3}^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x; y)$ du plan est le cercle (C) de centre $\Omega(3; 1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$

Exercice1 : le plan (P) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. (C) l'ensemble des points

$M(x; y)$ du plan tel que : $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ avec $(\theta \in \mathbb{R})$

1) montrer que (C) est le cercle (C) dont on déterminera de centre Ω et de rayon R et une équation cartésienne

2) soit le point $A(-1; 0)$; montrer que A est à l'extérieur du cercle (C) et déterminer les équations des deux tangentes au cercle (C) passant par A

3) déterminer les équations des deux tangentes au cercle (C) et qui sont parallèles à la droite :

$$(D) : 3x - 4y = 0$$

4)a) soit la droite (Δ) d'équation : $y = x$

Montrer que (Δ) coupe le cercle (C) en deux points à déterminer

4)b) déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que : $\frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y$

Solution :1) $\begin{cases} x = 2 + 2 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2 \cos \theta \\ y - 0 = 2 \sin \theta \end{cases}$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = (2 \cos \theta)^2 + (2 \sin \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 4((\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2) \Leftrightarrow$$

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

Donc l'ensemble (C) des points $M(x; y)$ du plan est le cercle (C) de centre $\Omega(2; 0)$ et de rayon $R = 2$

$$2) A(-1; 0); (C) : (x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$$

On a : $(-1 - 2)^2 + (0 - 0)^2 - 4 = 9 - 4 > 0$ donc A est à l'extérieur du cercle (C)

Soit (T) une droite qui passe par A et tangente au cercle (C) et soit : $ax + by + c = 0$ une équation cartésienne de (T) avec $(a; b) \neq (0; 0)$

Puisque (T) est tangente au cercle (C) alors :

$$d(\Omega, (T)) = R \text{ cad } \frac{|2a + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2 :$$

Et on a : $A \in (T)$ donc : $-a + c = 0$ donc on trouve :

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ ou } b = -\frac{a\sqrt{5}}{2} \text{ et l'équation cartésienne de}$$

$$(T) \text{ est : } 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

Par suite les équations des deux tangentes au cercle (C) passant par A sont :

$$(T_1) : 2x - \sqrt{5}y + 2 = 0 \text{ ou } (T_2) : 2x + \sqrt{5}y + 2 = 0$$

$$3)(D) : 3x - 4y = 0 \quad \Omega(2; 0)$$

Puisque $(T) \parallel (D)$ donc on pose :

$$(T) : 3x - 4y + c = 0 \text{ et } (T) \text{ tangentes au cercle } (C)$$

Donc : $d(\Omega, (T)) = R \Leftrightarrow \text{cad } \frac{|6 + c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 2 :$

$$\Leftrightarrow \frac{|6 + c|}{5} = 2 \Leftrightarrow |6 + c| = 10 \Leftrightarrow 6 + c = 10 \text{ ou } 6 + c = -10$$

$$c = 4 \text{ ou } c = -16$$

Donc les tangentes au cercle (C) sont :

$$(T_1') : 3x - 4y + 4 = 0 \text{ ou } (T_2') : 3x - 4y - 16 = 0$$

4)a) on va résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 0)^2 = 2^2 \\ y = x \end{cases} \text{ donc : } y = x \text{ et } 2x^2 - 4x = 0$$

$$\text{donc : } (x = 0 \text{ ou } x = 2) \text{ et } y = x$$

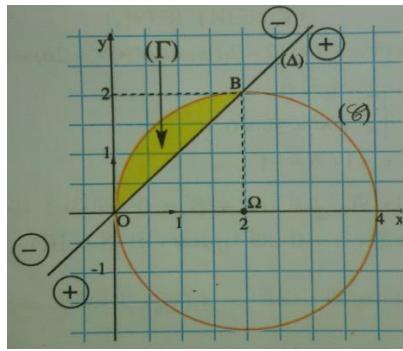
donc : (Δ) coupe le cercle (C) aux points :

$$O(0; 0) \text{ et } B(2; 2)$$

$$4)b) \frac{x^2 + y^2}{4} \leq x \leq y \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ (x - 2)^2 + y^2 - 4 \leq 0 \end{cases}$$

L'inéquation : $(x-2)^2 + y^2 - 4 \leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui se trouve à l'intérieur du cercle (C) ou sur le cercle (C) .
Et L'inéquation : $x - y \leq 0$ détermine l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan qui se trouve au-dessus de la droite (Δ) ou sur la droite (Δ) .

Voir la figure ci-dessus :



Exercice 2 : le plan (P) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Soient les points

$$A(3; 4) \quad B(4; 1) \quad C(2; -3)$$

1) montrer que les points A , B et C sont non alignés

2) Ecrire l'équation du cercle (C) passant par A , B et C

Solution : 1) on a : $\overrightarrow{AB}(1; -3)$ et $\overrightarrow{AC}(-1; -7)$

$$\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$$

Donc les points A , B et C sont non alignés

1) Soient $I\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$ et $J(3; -1)$ le milieu

respectivement du segments : $[AB]$ et $[BC]$

Et soit (D) la médiatrice de $[AB]$ donc (D) passe par I et \overrightarrow{AB} un vecteur normal à (D)

$$M(x; y) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right) - 3\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0$$

$$\text{Donc : } (D) : x - 3y + 4 = 0$$

Et soit (Δ) la médiatrice de $[BC]$ donc (Δ) passe par J et \overrightarrow{BC} un vecteur normal à (Δ)

$$M(x; y) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

Donc : $(\Delta) : x + 2y - 1 = 0$ (après simplifications)
soit Ω est le Centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc le point d'intersection de (Δ) et (D) on va donc résoudre le système :

$$\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Et la solution de ce système est : $\Omega(-1; 1)$ donc $\Omega(-1; 1)$ est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC et le rayon est : $r = A\Omega = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = 5$

Et l'équation du cercle est : $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$
 $(C) : x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$

Exercice 3: le plan (P) est rapporté à un repère $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. (C_m) l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \text{ avec } m \text{ Paramètre réel}$$

1) déterminer l'ensemble (C_1)

2) a) montrer que $\forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$ (C_m) est un cercle dont déterminera le centre Ω_m et de rayon R_m

2) b) déterminer l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) montrer que tous les cercles (C_m) passent par un point fixe I dont déterminera et tracer $(C_0); (C_1); (C_2)$

3) a) montrer que la droite $(\Delta) : x = 1$ est tangente à toutes les cercles (C_m)

3) b) soit $m > \frac{-3}{2}$ et $m \neq 1$ et le point $A(0; 1)$

Vérifier que A est à l'extérieur des cercles (C_m) et que la droite (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m)

solution : 1) (C_1) ? pour $m = 1$ on a :

$$(C_1) : x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ et } y + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ et } y = -1$$

Donc : (C_1) est le point $E(1; -1)$

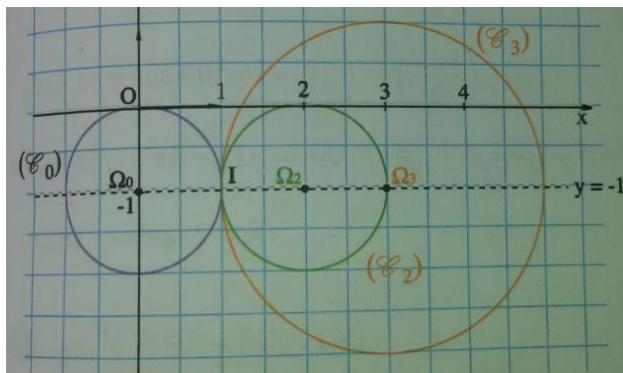
$$2) \text{ a) } (C_m) : x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y+1)^2 = (m-1)^2$$

Donc : (C_m) est un cercle de centre $\Omega_m(m; -1)$ et de rayon $R_m = |m-1| \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\}$

2) b) on pose : $x = m$ et $y = -1$ avec $m \in \mathbb{R} - \{1\}$
on a donc: l'ensemble des centres Ω_m lorsque $m \in \mathbb{R} - \{1\}$ est la droite d'équation : $y = -1$ privé du Point $E(1; -1)$

$$\begin{aligned} 2) \text{ b) } I(a; b) &\in (C_m) \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\} \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ma + 2b + 2m &= 0 \\ \Leftrightarrow m(2 - 2a) + a^2 + b^2 + 2b &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} - \{1\} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2a = 0 \\ a^2 + b^2 + 2b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow a = 1 \text{ et } b = -1 \text{ Donc : tous les cercles } (C_m) \text{ passent par un point fixe } I(1; -1) \end{aligned}$$



3) a) L'équation de (Δ) est : $x + 0y - 1 = 0$

$$\text{Et } d(\Omega_m, (\Delta)) = \frac{|m-1|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = |m-1| = R_m$$

Donc : la droite (Δ) est tangente à toutes les cercles (C_m) (on peut montrer que (Δ) coupe en (C_m) un point unique)

$$3) \text{ b) on a : } x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m = 2m + 3$$

$$\text{Et puisque : } m > \frac{-3}{2} \text{ alors : } x^2 + y^2 - 2mx + 2y + 2m > 0$$

donc A est à l'extérieur des cercles (C_m)

$$\text{Montrons que : } d(\Omega_m, (AI)) = \frac{|2m-2|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} R_m$$

Donc : (AI) n'est pas tangente aux cercles (C_m)

$$\text{Car : } \frac{2}{\sqrt{5}} R_m \neq R_m$$

Exercice 1 : Déterminer les ensembles :

$$(\Gamma 1) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0\}$$

$$(\Gamma 2) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - x + 2y + 4 = 0\}$$

Exercice 1 :

Soient les points $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ et $C(5, -2)$

1- Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés

2- Ecrire l'équation du cercle circonscrit au Triangle ABC .

Exercice 2 : Soit l'ensemble :

$$(C_m) = \{M(x, y) \in (\mathcal{P}) / x^2 + y^2 - 2mx + 4my + 4m^2 - 1 = 0\}$$

où m est un réel.

1- Montrer que pour tout m dans \mathbb{R} , l'ensemble (C_m) est un cercle et déterminer ses éléments.

2- Déterminer l'équation cartésienne du plus petit cercle (C_m) .

3- Déterminer l'ensemble dans lequel varient les centres Ω_m quand m décrit \mathbb{R}

4- a) Déterminer pour quelles valeurs de m le point $A(-1, 2)$ appartient-il à (C_m)

b) Soit $M_0(x_0; y_0)$ un point donné dans le plan, existent-ils toujours des réels m qui vérifient $M_0 \in (C_m)$

5- Déterminer s'il existe l'intersection de tous les cercles (C_m)

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

