Chapitre 5

Applications du produit scalaire

I/ Équations de droites

a) Définition

Définition

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal à une droite d si la direction de $\vec{n}$ est orthogonale à celle de d.

b) Propriétés

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1/ Une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $c\in\mathbb{R}$.

2/ Étant donnés trois réels a, b et c où a et b ne sont pas nuls simultanément, l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $ax+by+c=0$ est une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

Démonstration

1/ Soit d une droite de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et soit $A(x_0;y_0)\in d$.

Soit $M(x;y)$, on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_0\\y-y_0\end{pmatrix}$

$M(x;y)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow (x-x_0)a+(y-y_0)b=0 \Leftrightarrow ax+by+c=0$ avec $c=-ax_0-by_0$.

2/ Soit d l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $ax+by+c=0$ et soit $A(x_A,y_A)\in d$.

$M(x;y)\in d \Leftrightarrow ax+by+c=0=ax_A+by_A+c$

$\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0 \Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la droite passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exemple : Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(3;-1)$ et $B(2;4)$. Déterminer une équation de la médiatrice m de $[AB]$.

La médiatrice de [AB] est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de $[AB]$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ donc une équation de m est de la forme $-x+5y+c=0$.

De plus, $I\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right) \in m$ donc $-\frac{5}{2}+5\times\frac{3}{2}+c=0$ donc $c=-5$.
Une équation de m est donc $-x+5y-5=0$.

II) *Norme d'un vecteur.*

Le réel $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$, noté $\overrightarrow{u}^2$ est appelé carré scalaire de $\overrightarrow{u}$

Si $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{OA}$, alors $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}=\overline{OA}\times\overline{OA}=OA^2$ est un nombre positif.

Définition 3.2. La norme d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ est le réel positif $\sqrt{\overrightarrow{u}^2}$ notée $||\overrightarrow{u}||$

Propriétés (De la norme)**.**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, α un réel.

i) $||\overrightarrow{u}||=0$ *si et seulement si* $\overrightarrow{u}=0$.

ii) $||\alpha\overrightarrow{u}||=|\alpha|\times||\overrightarrow{u}||$

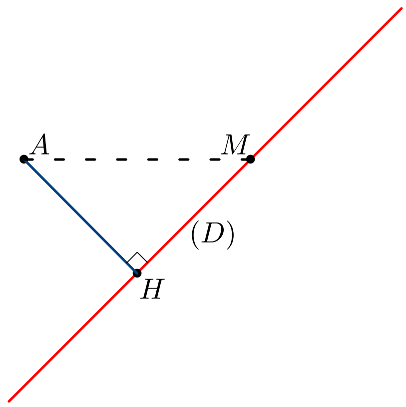
iii) $||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||\leq||\overrightarrow{u}||+||\overrightarrow{v}||$.

III) *Distance d'un point `a une droite.*

Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan. Soit A un point du plan, H son projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

Si M est un point quelconque de $(\mathcal{D})$, $AM^2=AH^2+HM^2$; donc $AM^2\geq AH^2$ c'est-à-dire $AM\geq AH$.

Ainsi la distance AH est le minimum des distances de A aux points de $(\mathcal{D})$.



D'où la définition suivante.

Définition Ãoit $(\mathcal{D})$ une droite du plan. Soit A un point du plan, H son projet Ā orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

Le nombre réel AH est appelé la distance du point A à la droite $(\mathcal{D})$; on le notera $d(A,(\mathcal{D}))$.

Théoreme . *Le plan est muni d'un repere orthonormé d'origine* O. *Soient* $(\mathcal{D})$ *une droite d'équation* $ax+by+c=0$ *et* A *un point de coordonnées* (x_A, y_A).
Alors $\boxed{d(A,(\mathcal{D})) = \dfrac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

Démonstration.

Le vecteur $\overrightarrow{n}(a,b)$ est normal à $(\mathcal{D})$
Puisque H appartient à $(\mathcal{D})$, on a : $ax_H+by_H+c=0$.

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n} = (\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{n} + \overrightarrow{OH}\overrightarrow{n}$$
$$= -ax_A - by_A + ax_H + by_H = -ax_A - by_A - c.$$
$$|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}| = |-ax_A - by_A - c|.$$
$$\| \overrightarrow{AH} \| . \| \overrightarrow{n} \| \, |\cos(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{n})| = |ax_A + by_A + c|.$$
$$\| \overrightarrow{AH} \| . \| \overrightarrow{n} \| = |ax_A + by_A + c|.$$
$$AH = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\| \overrightarrow{n} \|}.$$
$$AH = d(A,(\mathcal{D})) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Remarque. *Lorsque le vecteur* $\overrightarrow{n}(a,b)$ *est unitaire, alors*
$\boxed{AH = d(A,(\mathcal{D})) = |ax_A+by_A+c|}$.

Remarque.
Soit $(\mathcal{D})$ *une droite du plan de vecteur normal unitaire* $\overrightarrow{n}$, *et* A *un point du plan.*
Le réel

$$p_{\mathcal{D}}(A) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$$

est indépendant du choix de M ***sur la droite*** $(\mathcal{D})$.
En effet si H *est la projeté orthogonal de* A *sur* $(\mathcal{D})$, *on a :*
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = (\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}).\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}$.
On en déduit en outre, que $|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = AH$ *est la distance de* A *à* $(\mathcal{D})$.

IV/ Équations de cercles

a) Forme générale

Propriété

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre $A(x_A;y_A)$ et de rayon R est

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2$$

Démonstration

$$M(x;y)\in\mathscr{C}\Leftrightarrow AM=R\Leftrightarrow AM^2=R^2\Leftrightarrow(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=R^2.$$

Exemple : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.

Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x;y)$ tels que $x^2+y^2-6x+2y+5=0$?

$$\begin{aligned}M(x;y)\in\mathscr{E}&\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+2y+5=0\Leftrightarrow x^2-6x+y^2+2y+5=0\\&\Leftrightarrow(x-3)^2-9+(y+1)^2-1+5=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+1)^2=5\end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est donc le cercle de centre $C(3;-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

b) Representation parametrique d'un cercle

Soit $I(a;b)$ un point du plan, $(a,b\in\mathbb{R})$, et r un réel strictement positif : on note $\mathcal{C}(I;r)$ le cercle de centre I et de rayon r. Soit $M(x;y)$ un point du plan.

Définition : Le système

$$\begin{cases}x=a+r\cos t\\y=b+r\sin t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$$

est une **représentation paramétrique** du cercle $\mathcal{C}$.
t est le **paramètre**.

b) Cercle de diamètre donné

Propriété

On considère deux points A et B du plan. Le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$.

Démonstration

$$M\in\mathscr{C}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{ll}&M=A\\\text{ou}&M=B\\\text{ou}&AMB\text{ est un triangle rectangle en }M\end{array}\right.\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0.$$

Exemple : Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère orthonormal.
Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ avec $A(2;2)$ et $B(6;-2)$.

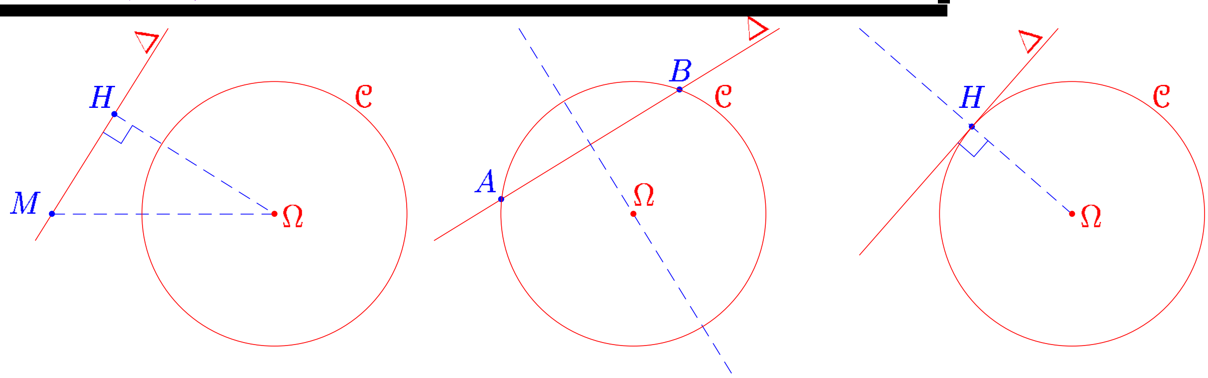
Soit $M(x;y)$. On a $\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}2-x\\2-y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}6-x\\-2-y\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}M(x;y)\in\mathscr{C}&\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow(2-x)(6-x)+(2-y)(-2-y)=0\\&\Leftrightarrow 12-8x+x^2-4-2y+2y+y^2=0\end{aligned}$$

Une équation de $\mathscr{C}$ est donc $x^2+y^2-8x+8=0$.

V) Position relative d'une droite et d'un cercle

Proposition 0.2.1.
Soit une droite Δ et un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$.
- ◇ Si $\mathrm{d}(\Omega, R) > R$, Δ et $\mathcal{C}$ ne se rencontrent pas.
- ◇ Si $\mathrm{d}(\Omega, R) < R$, Δ et $\mathcal{C}$ ont exactement deux points communs.
- ◇ Si $\mathrm{d}(\Omega, R) = R$, Δ et $\mathcal{C}$ ont un seule point commun.



Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ: $\mathrm{d}(\Omega, \Delta) = \Omega H$. Un point $M \in \Delta$ est sur $\mathcal{C}$ si, et seulement si $\Omega M^2 = R^2$. Par le théorème de pythagore, on a:

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = \mathrm{d}(\Omega, \Delta)^2 + HM^2,$$

et M appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si

$$HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \Delta)^2.$$

Il existe zéro, deux ou une solution à cette équation selon que le second membre est strictement négatif, strictement positif ou nul. ■

Vocabulaire: Dans le dernier cas, Δ est dite tangente au cercle en H; elle est orthogonale au rayon du cercle.

Regardons analytiquement l'équation d'une tangente:

Proposition 0.2.2.
L'équation de la tangente au point de coordonnées (x_0, y_0) du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

est:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$$

Démonstration. La tangente est la droite passant par (x_0, y_0) et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega M_0}$. Le centre Ω a pour coordonnées (a, b), ainsi le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_0}$ a pour composante $(x_0 - a, y_0 - b)$. Sont équation est donc

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$xx_0 - ax - x_0^2 + ax_0 + yy_0 - by - y_0^2 + by_0 = 0,$$

donc:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - x_0^2 - y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 = 0,$$

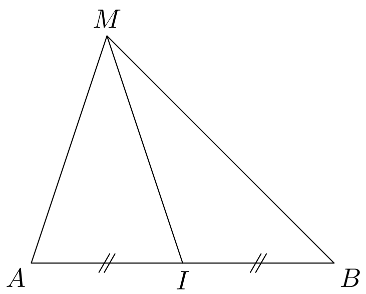
et compte tenu du fait que l'on a $x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0$, on obtient la formule de l'énoncé.

VI/ Longueurs et angles dans un triangle

a) Théorème de la médiane

On considère deux points A et B du plan et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$



Démonstration

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA^2 + IB^2 \end{aligned}$$

Or I est le milieu de $[AB]$ donc $IA = IB = \frac{1}{2}AB$ donc $IA^2 = IB^2 = \frac{1}{4}AB^2$

De plus $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

Ainsi $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2 \times \frac{1}{4}AB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

Exemple : ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 12$. Calculer AI où I est le milieu de $[BC]$.

D'après le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$.

On a donc $2AI^2 = 6^2 + 8^2 - \frac{1}{2} \times 12^2 = 28$.

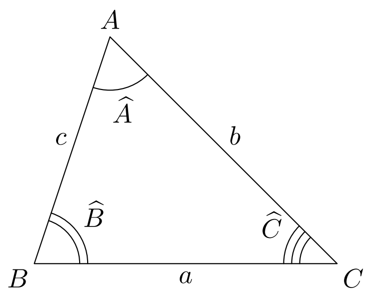
Ainsi $AI = \sqrt{14}$.

b) Formules d'Al Kashi

Propriété

On considère un triangle ABC. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{ACB}$. On a :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A}) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B}) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C}) \end{aligned}$$



Démonstration

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Ainsi $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ soit $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

Exemple : ABC est un triangle tel que $AC = 9$, $AB = 5$ et $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$. Calculer BC.

D'après la formule d'Al Kashi :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\widehat{A}) = 5^2 + 9^2 - 2 \times 5 \times 9 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 61$

Ainsi $BC = \sqrt{61}$

c) Aire d'un triangle

On considère un triangle ABC et on appelle S son aire. Avec les notations ci-dessus, on a :
$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$$

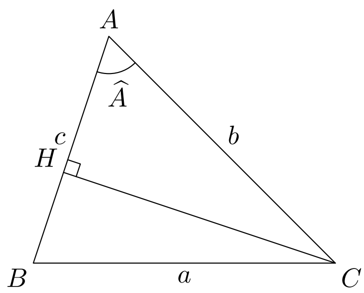
Démonstration

Soit H le projeté orthogonal de C sur AB. On a alors $S = \frac{1}{2}AB \times CH$.

Si l'angle $\widehat{A}$ est aigu alors $CH = AC\sin(\widehat{A})$.

Si l'angle $\widehat{A}$ est obtus alors $CH = AC\sin(\pi - \widehat{A}) = AC\sin(\widehat{A})$

Dans tous les cas $S = \frac{1}{2}AB \times AC \times \sin(\widehat{A})$.



d) Formule des sinus

On considère un triangle ABC. Avec les notations ci-dessus, on a :
$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$$

Démonstration

On a $S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ac\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C})$

donc $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin(\widehat{A})}{a} = \frac{\sin(\widehat{B})}{b} = \frac{\sin(\widehat{C})}{c}$

ainsi $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$.

Exemple : ABC est un triangle tel que $BC = 5$, $\widehat{B} = 50°$ et $\widehat{C} = 75°$. Calculer AB et AC et donner les valeurs arrondies au dixième.

$\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 55°$

$\frac{AB}{\sin(\widehat{C})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{B})} = \frac{BC}{\sin(\widehat{A})} \Leftrightarrow \frac{AB}{\sin(75°)} = \frac{AC}{\sin(50°)} = \frac{5}{\sin(55°)}$

On a donc $AB = \frac{5\sin(75°)}{\sin(55°)} \simeq 5,9$ et $AC = \frac{5\sin(50°)}{\sin(55°)} \simeq 4,7$.