Exercices

Introduction et barycentres de deux points.

Exercice 1.

On considère un ~~triangle ABC.~~ On appelle I le milieu de [BC].

Démontrer que $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Exercice 2.

A et B sont deux points distincts. N est le point défini par la relation $\overrightarrow{NA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$.

1) Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires.
2) Placer le point N sur une figure.
3) Exprimer N comme barycentre des points A et B.

Exercice 3.

ABCD est un parallélogramme de centre O. Les points M et N sont tels que :

$3\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (1) et $\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DN} = \vec{0}$ (2).

1) Exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ en utilisant (1). Placer M.
2) Trouver les réels α et β pour que M soit barycentre des points pondérés (A, α) et (B, β).
3) Exprimer $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{CD}$ en utilisant (2). Placer N.
4) Trouver les réels α ' et β ' pour que N soit barycentre des points pondérés (C, α ') et (D, β ').
5) Justifier que le quadrilatère NCMA est un parallélogramme et que O est le milieu de [MN].

Exercice 4.

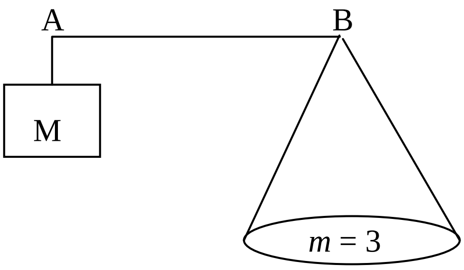
B est le milieu de [AC].

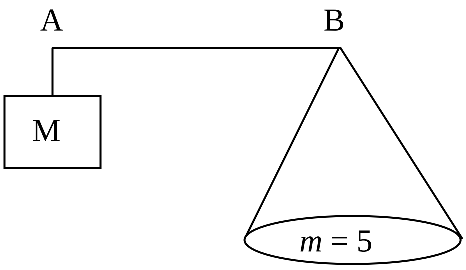
Démontrer que le barycentre de (A, 1) (C, 3) est confondu avec celui de (B, 2) (C, 2).

Exercice 5.

Une balance est constituée d'une masse M et d'un plateau fixé à l'extrémité d'une tige. Pour peser une masse *m*, le vendeur place, à une position précise, un crochet sur la tige. Cette balance a l'avantage, pour le commerçant, de ne pas manipuler plusieurs masses.

1) Pour chacun des cas suivants, où faut-il fixer le crochet G sur le segment [AB] pour réaliser l'équilibre ? (M = 2 kg)





2) Le point G est tel que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Quelle est la masse *m* pesée ? (Données : M = 2 kg)

Exercice 6.

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 8 cm et BA = 5 cm. Soit I le milieu de [BC].

1) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BA}$ et montrer que F est le barycentre des points A et B pondérés par des réels que l'on déterminera.

2) P étant un point du plan, réduire (en justifiant) chacune des sommes suivantes :

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$$

$$-\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB}$$

$$2\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PA}$$

3) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\frac{1}{2}\overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|-\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|.$$

4) et représenter l'ensemble des points N du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{NB} - 2\overrightarrow{NA}\right\|.$$

Barycentres de trois points et plus.

Exercice 7. Le centre de gravité comme isobarycentre.

ABC est un triangle, A' est le milieu de [BC]. On se propose de démontrer la propriété :

« G est le centre de gravité du triangle ABC » équivaut à « $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ».

1) Quelle égalité vectorielle entre $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA'}$ caractérise le centre de gravité G ?

2) a) Prouver que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA'}$.

b) En déduire la propriété énoncée au début de l'exercice.

3) a) Quelle interprétation cette propriété peut-on donner en physique ?

b) Traduire l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ en terme de barycentre.

Exercice 8.

Soit ABCD un carré et K le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1), (C, 2) et (D, 1).
On note I le barycentre des points pondérés (A, 2), (B, – 1) et J celui de (C, 2) et (D, 1).

1) Placer I et J en justifiant.

2) Réduire l'écriture des vecteurs suivants : $2\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB}$ et $2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}$.

En déduire que K est le barycentre de (I, 1) et (J, 3).

3) Placer K en justifiant.

Exercice 9.

On considère un triangle ABC et l'on désigne par G le barycentre de (A, 1), (B, 4) et (C, – 3).

1) Construire le barycentre I de (B, 4) et (C, – 3).

2) Démontrer que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$. En déduire la position de G sur (AI).

Exercice 10.

ABC est un triangle. On note G le barycentre de (A, 2), (B, 1) et (C, 1). Le but de l'exercice est de déterminer la position précise du point G.

1) Soit I le milieu de [BC]. Démontrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

2) En déduire que G est le barycentre de A et I munis de coefficients que l'on précisera.

3) Conclure.

Exercice 11.

1) Placer dans un repère les points A (1, 2), B (– 3, 4) et C (– 2, 5).
Soit G le barycentre des points pondérés (A, 3), (B, 2) et (C, – 4).
2) Quelles sont les coordonnées de G ? Placer G.
3) La droite (BG) passe t-elle par l'origine du repère ? Justifier.

Exercice 12.

ABC est un triangle. Soit G le barycentre de (A, 1), (B, 3) et (C, – 3).
Démontrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

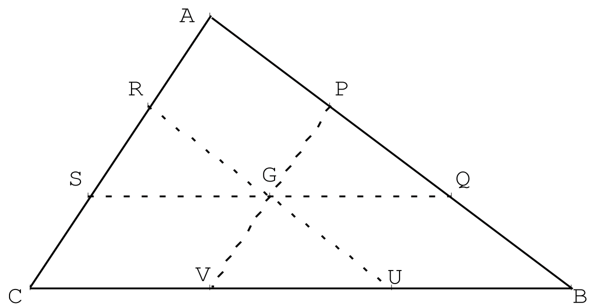
Exercice 13.

ABC est un triangle. On considère le barycentre A' de (B, 2) et (C, – 3), le barycentre B' de (A, 5) et (C, – 3) ainsi que le barycentre C' de (A, 5) et (B, 2).
Démontrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.
Indication : on pourra considérer le barycentre G de (A, 5), (B, 2) et (C, – 3).

Exercice 14.

ABC est un triangle de centre de gravité G.
On définit les points P, Q, R, S, U, V par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \ , \ \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \ , \ \overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \ , \ \overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \ , \ \overrightarrow{BU} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \ , \ \overrightarrow{BV} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$$



1) Démontrer que P est le barycentre de (A, 2) et (B, 1) et que V est barycentre de (C, 2) et (B, 1).
2) En déduire que G est le milieu de [PV].
3) On démontre, de même, que G est le milieu de [RU] et de [SQ] (inutile de refaire les calculs).
Démontrer que RPUV est un parallélogramme.

Exercice 15.

Soit ABC un triangle et G un point vérifiant : .
Le point G est-il barycentre des points pondérés (A, 5), (B, 1) et (C, 3) ? Justifier.

$$\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Exercice 16.

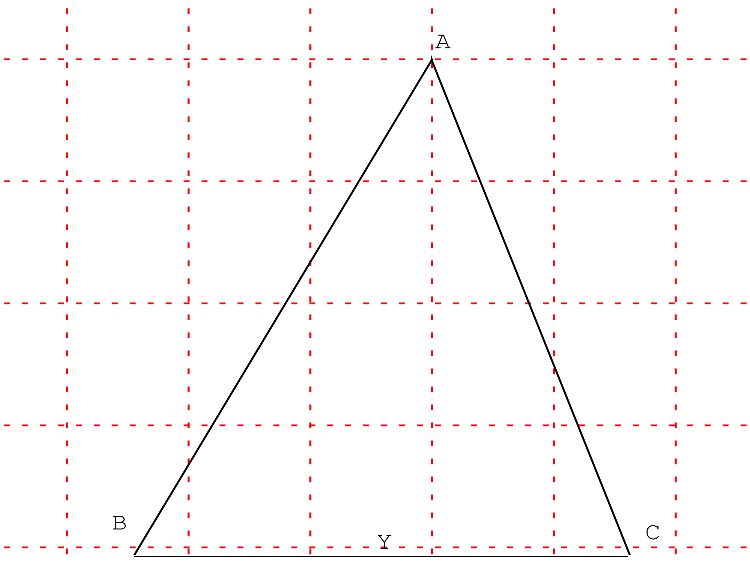
ABCD est un carré.
1) Quel est l'ensemble E des points M du plan tels que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$ = AB ?
2) Représenter cet ensemble E.

Exercice 17.
ABCD est un quadrilatère et G est le barycentre de (A, 1), (B, 1) (C, 3) (D, 3).
Construire le point G et expliquer votre construction.

Exercice 18.
Dans le triangle ABC, E est le milieu de [AB] et G est le barycentre de (A, – 2), (B, – 2), (C, 15).
Démontrer que G, C, et E sont alignés.

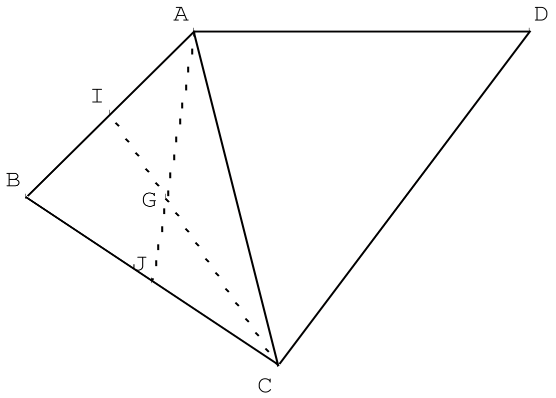
Exercice 19.
ABCD est un quadrilatère. On note G son isobarycentre. Le but de cet exercice est de préciser la position du point G.
1) On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BD]. Démontrer que G est le barycentre de I et J munis de coefficients que l'on précisera.
2) Conclure et faire une figure.
3) Si ABCD est un parallélogramme, préciser la position du point G.

Exercice 20.
ABC est le triangle donné ci-dessous. Y est le milieu de [BC].
1) Placer, en justifiant, le barycentre U de (A, 4) et (C, 1).
Puis placer le barycentre E de (A, 4) et (B, 1).
2) Soit G le barycentre de (A, 4), (B, 1) et (C, 1). Montrer que G est le barycentre de (E, 5) et (C, 1).
3) Démontrer que les droites (EC), (AY) et (BU) sont concourantes.



Exercice 21.
ABCD est un quadrilatère.
G est le centre de gravité du triangle ABC.
I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [BC].
L est le barycentre de (A, 1) et (D, 3).
K est le barycentre de (C, 1) et (D, 3).

Le but de l'exercice est de démontrer que
les droites (IK), (JL) et (DG) sont concourantes.



Pour cela, on utilise le barycentre H de (A, 1), (B, 1), (C, 1) et (D, 3).

1) Placer en justifiant, les points L et K.
2) Démontrer que H est le barycentre de G et D munis de coefficients que l'on précisera.
3) Démontrer que H est le barycentre de J et L munis de coefficients que l'on précisera.
4) Démontrer que H est le barycentre de I et K munis de coefficients que l'on précisera.
5) Conclure.

Exercice 22. La droite d'Euler.
On considère un triangle ABC et A' le milieu de [BC]. On note O le centre du cercle circonscrit à ce triangle. On considère le point H défini par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ [1].
1) Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$ [2].
2) Déduire des deux relations [1] et [2] que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$.
3) En déduire que H appartient à la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
On admet, que de la même manière, on peut démontrer que le point H appartient aux deux autres hauteurs du triangle ABC.
4) Reconnaître le point H.
5) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Montrer que O, G et H sont alignés et que $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$.

Barycentres dans l'espace.

Exercice 23.
Pour cet exercice, une figure est recommandée.
ABCDE est une pyramide à base carrée BCDE.
Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D et E.
On note O le centre du carré BCDE (c'est-à-dire l'intersection des diagonales (CE) et (BD)).
1) Démontrer que O est l'isobarycentre de BCDE.
2) Démontrer que G est le barycentre de (O, 4) et (A, 1).
3) Soit G_1 le centre de gravité du triangle ABE et I le milieu de [CD]. Démontrer que $G \in (G_1 I)$.

Exercice 24.
Pour cet exercice, une figure est recommandée.
ABCD est un tétraèdre et G est le barycentre de (A, 4), (B, 1), (C, 1) et (D, 1).
On note H le centre de gravité du triangle BCD (c'est-à-dire H est l'isobarycentre de B, C, D).
1) Démontrer que G est le barycentre de (H, 3) et (A, 4).
2) Situer le point G sur la droite (AH).