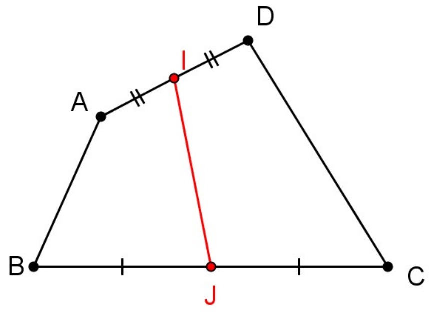
Exercices sur le barycentre

Exercice 1 :

Rappels sur les vecteurs

$ABCD$ est un quadrilatère quelconque, I le milieu de $[AD]$ et J celui de $[BC]$.

1) Ecrire $\overrightarrow{IJ}$ comme la somme de $\overrightarrow{AB}$ et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
2) Décomposer le même $\overrightarrow{IJ}$ en utilisant $\overrightarrow{DC}$.
3) En déduire que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.



Exercice 2 :

Rappels sur les vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O, I est le milieu de $[AB]$ et J le point tel que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{OC}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
2) Justifier les égalité : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$.
3) Quel théorème vous permet de conclure que O, I et J sont alignés ?

Exercice 3 :

Rappels sur les vecteurs

ABC est un triangle, E est tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I est tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F est tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que I, E et F sont alignés.

Exercice 4 :

Rappels sur les vecteurs

$ABCD$ est un parallélogramme, M, N, Q sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA} \quad , \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe (BC) en P. Il s'agit de trouver le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$. Considérons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$.

1) Calculer les coordonnées des points M, N et Q.
2) Justifier qye P a pour coordonnées $(1; k)$.
3) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont colinéaires et calculer k.

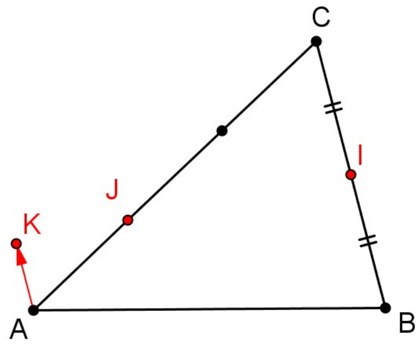
Exercice 5 :

Rappels sur les vecteurs

Sur la figure c-contre, I est le milieu de $[BC]$, J et K sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Calculer les coordonnées de I, J et K puis prouver que I, J et K sont alignés.



Exercice 6 :

Barycentre de deux points

A et B sont deux points tels que $AB = 6$ cm. Construire (s'il existe) le barycentre de (A, α), (B, β) dans chacun des cas suivants :

1) $\alpha = 4,\ \beta = -1$
2) $\alpha = 2,\ \beta = 1$
3) $\alpha = 2,\ \beta = -2$
4) $\alpha = \frac{1}{10},\ \beta = \frac{1}{5}$

Exercice 7 :

Barycentre de deux points

A et B sont deux points tels que $AB = 9$ cm. Construire (s'il existe) le barycentre de (A, α), (B, β) dans chacun des cas suivants :

1) $\alpha = 4,\ \beta = 5$
2) $\alpha = 8,\ \beta = -5$
3) $\alpha = -11,\ \beta = 2$
4) $\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = -\frac{1}{2}$
5) $\alpha = -1,\ \beta = -5$
6) $\alpha = 0,\ \beta = 2011$

Exercice 8 :

Barycentre de deux points

Les points A et B sont donnés et G est défini par la condition indiquée. Déterminer deux réel α et β tels que G soit le barycentre de (A, α), (B, β).

1) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{GB}$
2) $2\overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$
3) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

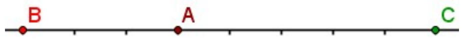
Exercice 9 :

Barycentre de deux points

Pour les exercices suivants, les points A, B et C sont indiqués sur la figure. Dans les deux cas suivants, trouver deux réels α et β tels que :

- A soit le barycentre de (B,α), (C,β) ;
- B soit le barycentre de (A,α), (C,β) ;
- C soit le barycentre de (A,α), (B,β).

1)


2)


Exercice 10 :

Barycentre de trois points

ABC est un triangle de centre de gravité G. G' est le symétrique de G par rapport au milieu de $[BC]$.

1) Prouver que G est le milieu de $[G'A]$.

2) Justifier que :

$$\overrightarrow{G'G} = \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'C}$$

3) Exprimer $\overrightarrow{G'A}$ en fonction de $\overrightarrow{G'B}$ et $\overrightarrow{G'C}$ puis en déduire que G' est un barycentre de A, B et C affectés de coefficients que l'on précisera.

Exercice 11 :

Barycentre de trois points

ABC est un triangle. Construire (s'il existe) le barycentre G de (A,α), (B,β), (C,γ). Construire d'abord un barycentre de deux points, puis utiliser la règle d'associativité.

1) $\alpha = 3,\ \beta = 2,\ \gamma = 1$

2) $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -3$

3) $\alpha = \dfrac{1}{2},\ \beta = -\dfrac{1}{3},\ \gamma = -\dfrac{1}{6}$

4) $\alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 2$

Exercice 12 :

Barycentre de trois points

ABC est un triangle ; I est le barycentre de $(A,2)$, $(B,1)$. J celui de $(B,1)$, $(C,-2)$ et G le barycentre de $(A,2)$, $(B,1)$, $(C,-2)$. Le but de l'exercice est de localiser G à l'intersection de deux droites.

1) Quel théorème permet de justifier l'alignement de A, J et G, puis celui de C, I et G ?

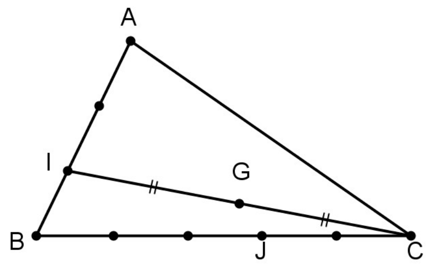
2) En déduire que G est à l'intersection de (AJ) et de (CI). Placer alors G.

3) Démontrer que (BG) et (AC) sont parallèles.

Exercice 13 :

Barycentre de trois points

ABC est un triangle. Les points I et J sont repérés sur la figure ci-contre, dont les graduations sont régulières. G est le milieu de $[CI]$. Le but de l'exercie est de montrer que A, G et J sont alignés.



1) Exprimer I comme un barycentre de A et de B, puis J comme un barycentre de B et de C.
2) On note G' le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 3)$. Quel théorème permet de justufier que G' est le milieu de $[IC]$? En déduire de $G' = G$.
3) Démontrer que A, G et J sont alignés.

Exercice 14 :

Barycentre de trois points

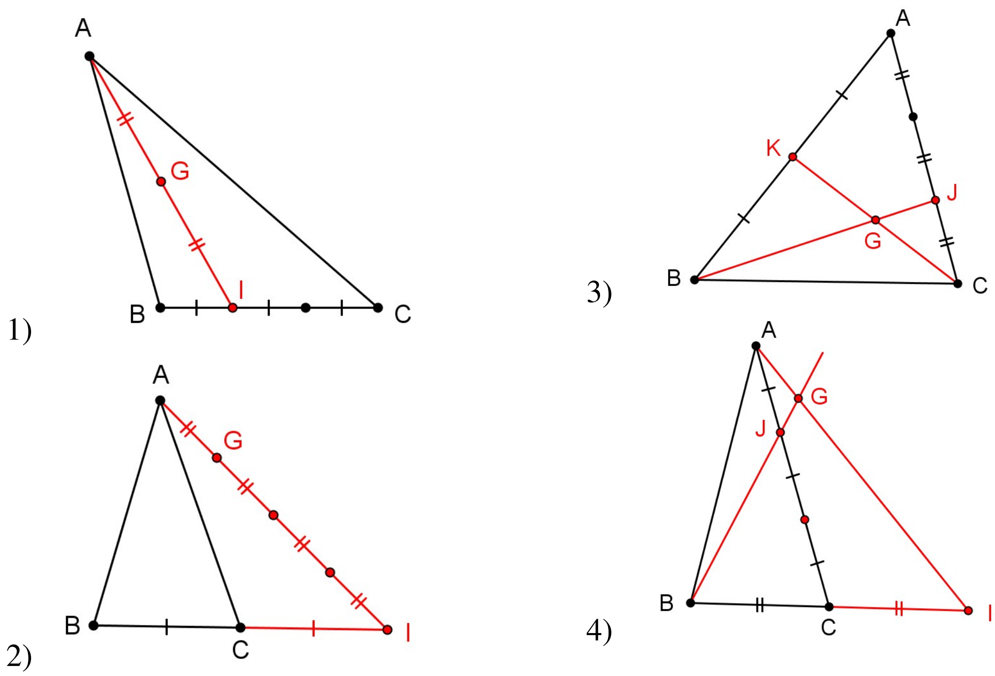
ABC est un triangle de centre de gravité G. Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble Δ des points M du plan tels que le vecteurs $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

1) Exprimer $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.
2) Justifier l'affirmation :
   "Dire que M appartient à Δ équivaut à dire que $\overrightarrow{GM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$"
3) En déduire Δ et le construire.

Exercice 15 :

Barycentre de trois points

Pour les exercices suivants, trouver trois réels α, β et γ tels que G soit le barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ).



Exercice 16 :

Barycentre de *n* points

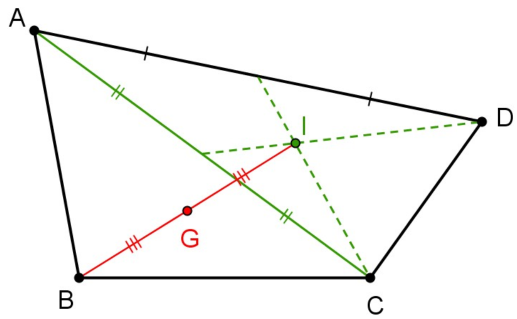
Pour les exercices suivants, justifier de l'existence du barycentre G, puis le construire.

1) $ABCD$ est un rectangle et G le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 2)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$.
2) $ABCD$ est un parallélogramme et G barycentre de $(A, 2)$, $(B, -3)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$.
3) $ABCD$ est un quadrilatère et G est le barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$, $(C, 2)$, $(D, 2)$.

Exercice 17 :

Barycentre de *n* points

La figure ci-contre indique une construction du barycentre G de $(A, 1)$, $(B, 3)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$. Justifier cette construction.



Exercice 18 :

Barycentre de *n* points

$ABCD$ est un rectangle, construire le barycentre G de (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ) dans chacun des cas suivants :

1) $\alpha = -2,\ \beta = 3,\ \gamma = 1,\ \delta = 1$
2) $\alpha = -3,\ \beta = 2,\ \gamma = 1,\ \delta = -3$
3) $\alpha = -\dfrac{1}{8},\ \beta = \dfrac{3}{8},\ \gamma = \dfrac{1}{4},\ \delta = \dfrac{1}{2}$

Exercice 19 :

Coordonnées du barycentre

1) Placer les points $A(1; 3)$ et $B(2; 1)$.
2) Calculer les coordonnées des points M, barycentre de $(A, -1)$, $(B, 3)$ et N, barycentre de $(A, 2)$, $(B, -1)$.
3) Calculer le les coordonnées du milieu I de $[AB]$.
4) Trouver le réel k tel que $\overrightarrow{MI} = k\overrightarrow{MN}$
5) En déduire deux réels α et β tels que I soit le barycentre de (M, α), (N, β).

Exercice 20 :

Coordonnées du barycentre

1) Placer les points $A(2; 1)$, $B(-1; 4)$ et $C(-3; -2)$.
2) Calculer les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC.

3) Calculer les coordonnées de G', barycentre de $(A,-2)$, $(B,3)$, $(C,1)$.
4) les points O, G et G' sont-ils alignés ?

Exercice 21 :

Ensemble de points

$[AB]$ est un segment de longueur 5 cm. On se propose de trouver l'ensemble Γ des point M tels que :

$$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\|=10$$

1) On pose G le barycentre de $(A,2)$, $(B,3)$. Réduire la somme $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$.
2) En déduire la nature de Γ. Construire alors Γ.

Exercice 22 :

Ensemble de points

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB=4$ cm. On se propose de trouver l'ensemble Γ des points M tels que :

$$\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\|=4$$

1) On pose G le barycentre de $(A,-1)$, $(B,1)$, $(C,2)$. Réduire la somme $-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$.
2) En déduire la nature de Γ.
3) Montrer que Γ passe par le point C. Construire G puis Γ.

Exercice 23 :

Ensemble de points

ABC est un triangle équilatéral de côté 5 cm.

1) Construire G, barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,1)$, et prouver que $ABCG$ est un losange.
2) Quel est l'ensemble Γ des points M tels que :

$$\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

3) Vérifier que le milieu de $[AC]$ appartient à Γ. Tracer Γ.

Exercice 24 :

Ensemble de points

ABC est un triangle rectangle en A, I est le milieu de $[BC]$, Γ est le cercle de centre A passant par I. G est le point diamétralement opposé à I.

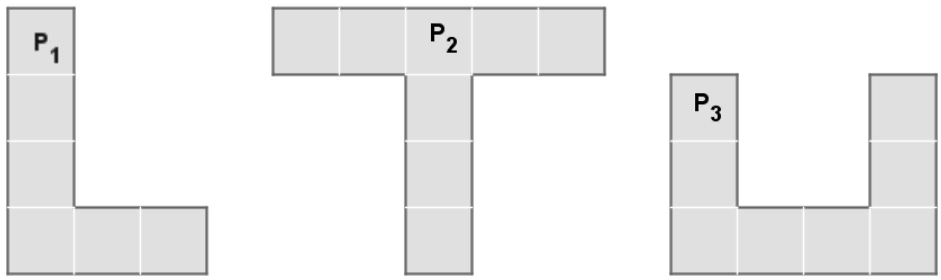
1) Prouver que le point G est le barycentre de $(A,4)$, $(B,-1)$, $(C,-1)$.
2) Trouver deux réels b et c tels que A est le barycentre de $(G,2)$, (B,b), (C,c).
3) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\|2\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=2\|\overrightarrow{BC}\|$$

Exercice 25 :

Centre d'inertie

Pour chacune des plaques homogènes suivantes, construire le centre d'inertie.

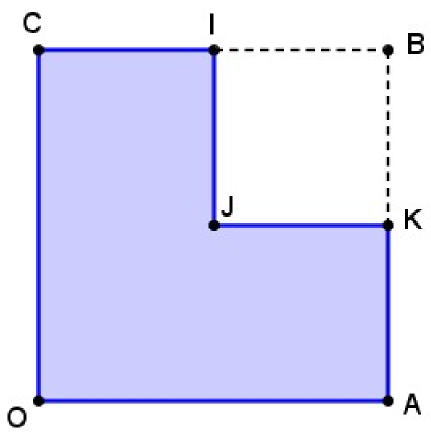


Exercice 26 :

Centre d'inertie

Une plaque homogène P est constituée par un carré $OABC$ de côté 8 cm dont on a retiré le carré $BIJK$ de côté 4 cm.

Trouver la position du centre d'inertie de la plaque par deux méthodes.

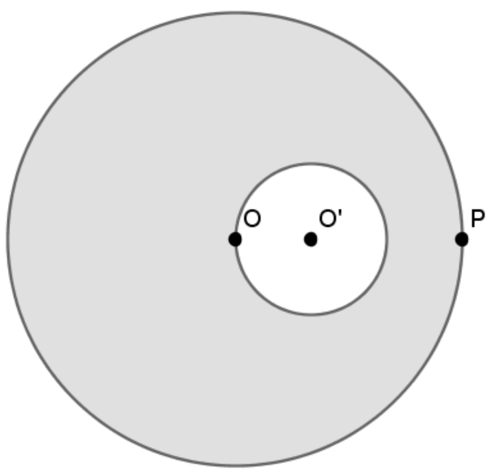


Exercice 27 :

Centre d'inertie

Une rondelle a la forme d'un disque évidé suivant le schéma ci-contre pour lequel $OP = 3OO'$.

1. Trouver la position du centre d'inertie I de la rondelle évidée.
2. On note M la masse de la rondelle évidée. Quelle masse m doit-on placer en P afin que l'ensemble constitué de la rondelle et du point "massique" P ait O pour centre d'inertie ?



Exercice 28 :

Centre d'inertie

On considère une plaque homogène composée d'un carré de côté 10 cm surmonté d'un rectangle de hauteur 10 cm et de longueur ℓ (exprimée en cm) tel que $\ell \geqslant 10$ (figure ci-contre)

Déterminer la longueur maximale ℓ_{max} pour laquelle la plaque reste en équilibre sur la base $[AB]$.