TD BARYCENTRE AVEC CORRECTION

Exercice1 : Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$

Solution : $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc :

$4\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{AG} + 5\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB}$

Donc le point $G \in (AB)$

Exercice2 :

Construire $G = Bar\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

Solution :

$G = Bar\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\sqrt{2}\right))\}$

donc : $G = Bar\{(A, 2); (B, -1)\}$

donc : $2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AG} - \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$ Donc $G = B$

Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $R\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$ et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, -5)\}$

Déterminer les coordonnées de G

Solution : on a : $\begin{cases} x_G = \dfrac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \dfrac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases}$ donc

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{17}{4} \\ y_G = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Donc : $G\left(\frac{17}{4};\frac{3}{4}\right)$

Exercice4 : soit ABC un triangle et soit :

$I = Bar\ \{(B, 4); (C, -3)\}$

Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

Solution : on a : donc

$\left(4 + (-3)\right)\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ $I(4;-3)$

Exercice5 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$ et $E \notin (AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$

1)Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

solution : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ donc G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) on a G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G \in (EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G \in (AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice6 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$

Et soit $G = Bar\ \{(A, 1); (B, 2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de G

2)Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

$(C) = \left\{M \in (P) / \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6\right\}$

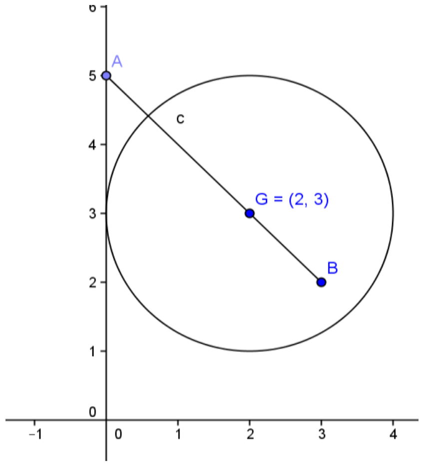
Solution : $\begin{cases} x_G = \dfrac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$ donc $G(2;3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :

$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6cm \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm$

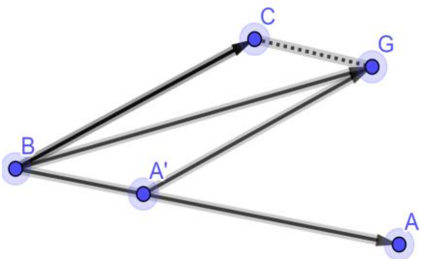
$\Leftrightarrow |3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm \Leftrightarrow 3MG = 6cm \Leftrightarrow MG = 2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 2cm$

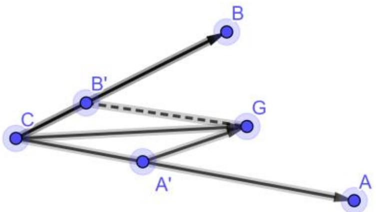


Exercice7 : soit ABC un triangle
1)Construire G = Bar{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)}
2)Construire G = Bar{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)}

Solution : 1)
G = Bar{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)}donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left(1+(-1)+3\right)\overrightarrow{MG}=1\overrightarrow{MA}+(-1)\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=B$ on aura :
$3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$



2) G = Bar{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)}
Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left(4+1/2-3\right)\overrightarrow{MG}=4\overrightarrow{MA}+1/2\,\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=C$ on aura :
$\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=4\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG}=\frac{8}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



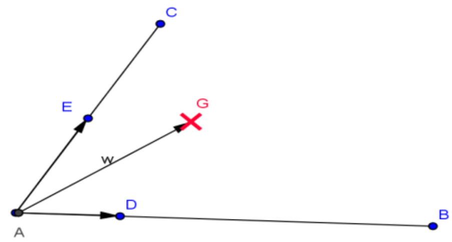
Exercice 8: Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$
1)montrer que G le barycentre de :
{(A, 1); (B, 1); (C, 2)} et construire le point G

Solution : $2\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

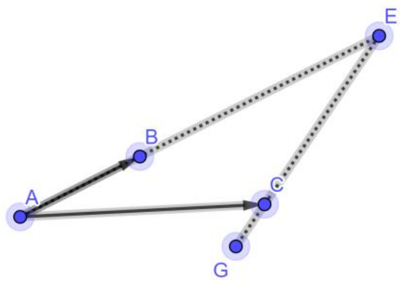
$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}=\vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
Donc G le barycentre de : {(A, 1); (B, 1); (C, 2)}
On a :® $\overrightarrow{AG}=\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: donc $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$



Exercice 9 : on utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré {(A, 2); (B, -3); (C, 5)}
Solution : soit E = Bar{(A, 2); (B, -3)}
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME}=2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$
On pose : $M=A$ on aura : $-\overrightarrow{AE}=-3\overrightarrow{AB}$
Donc : $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}$
d'après la Propriété d'associativité on a :
G = Bar{(E, -1); (C, 5)}
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG}=-\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}$
On pose : $M=E$ on aura :
$4\overrightarrow{EG}=5\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG}=\frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$



Exercice 10 : Soit ABC un triangle.et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Monter que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$
Solution : G le centre de gravité du triangle ABC
Donc G est le barycentre de :
{(A, 1); (B, 1); (C, 1)}

I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le barycentre de : { $(B, 1)$; $(C, 1)$}
D'après la Propriété d'associativité on a :
G est le barycentre de : { (I, 2); (A, 1)}

Exercice11 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose : $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$

1) Réduire l'écriture de $\vec{V}$ et monter que $\vec{V}$ ne dépend pas du point M

2) soit K = $Bar\{(C, -3); (B, 1)\}$ montrer que : $\vec{V} = 2\overrightarrow{KA}$

3) soit G= $Bar\{(A, 2); (B, -1); (C, -3)\}$ montrer que : Pour tout point M on a :
$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{GM}$

4) en déduire l'ensemble des points M tel que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : 1)
$\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)$

$\vec{V} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{V}$ ne dépend pas du point M

2)on a : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si $M = K$ on aura :
$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

Et on a : K = $Bar\{(C, -3); (B, 1)\}$ donc :
$\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

Donc : $2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{KA} = \vec{V}$

3) d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \left(2 + (-1) + (-3)\right)\overrightarrow{MG} = -2\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{GM}$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$

$\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{GM}\right\| = \left\|2\overrightarrow{KA}\right\| \Leftrightarrow 2GM = 2KA \Leftrightarrow GM = KA$

Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r = KA$

Exercice 12 : Soit ABC un triangle tel que : $AC = 6cm$ et $AB = 5cm$ et $BC = 4cm$

a) Construire G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$

b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AC$

c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :
$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : G est le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$ donc G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2} d'après La propriété d'associativité du barycentre
Donc G est le milieu du segment $[BI]$

b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = AC \Leftrightarrow GM = \frac{AC}{4} = 1.5$

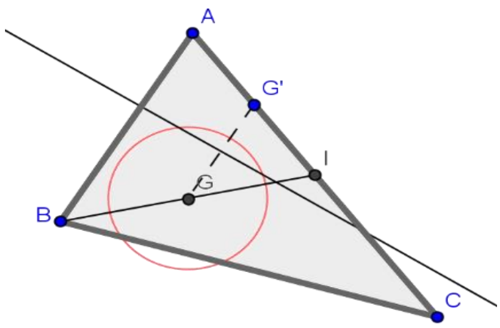
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 1.5cm$

b) Soit G' est le barycentre de : $\{(A, 3); (C, 1)\}$ Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M \in (P)$
$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG'}$

Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow 4MG = 4MG' \Leftrightarrow MG = MG'$

Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$

Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



Exercice13 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$ et $D(1;0)$ Et soit $G = Bar\{(A, 1); (B, 2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de K = $Bar\{(A, 2); (B, 3)\}$

2)Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC

3)Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1) $\begin{cases} x_K = \dfrac{-2+0}{5} == \dfrac{-2}{5} \\ y_K = \dfrac{2+6}{5} = \dfrac{8}{5} \end{cases}$ donc $K\left(-\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$

2) les coordonnées de L sont :

$$\begin{cases} x_L = \dfrac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \dfrac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \dfrac{1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \dfrac{1\times 1 + 1\times 2 + 1\times(-1)}{1+1+1} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Donc $L\left(0;\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B+cx_C+dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B+cy_C+dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{2\times x_A+3\times x_B+1\times x_C+(-1)\times x_D}{5}=\dfrac{-2}{5} \\ y_G=\dfrac{2\times y_A+3\times y_B+1\times y_C+(-1)\times y_D}{5}=\dfrac{7}{5} \end{cases}$$

$G\left(-\frac{2}{5};\frac{7}{5}\right)$

Exercice14 : soit $ABCD$ un quadrilatère convexe

Soit H le barycentre du système pondéré {(A, 2) ; (B, 5); (C, -1) }

Soit K le barycentre du système pondéré {(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)}

Soit E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)}

1)Montrer que $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)} et Construire H

3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

b) en déduire que $(AK)\parallel(DH)$

Solution :

1)on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{ME}=\frac{1}{4}\left(5\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)$$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut Construire E

2) on a : E = Bar {(C, -1) ; (B, 5)} et $5+(-1)=4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré {(A, 2); (E, 4) } et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré {(A, 1) ; (E, 2)}

on sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{MH}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}\right)$$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système Pondéré {(D, -6); (E, 4) }

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)} ?

Puisque K est le barycentre du système pondéré {(D, -3) ; (E, 2)}

Pour tout point M du plan (P) on a :

$$-\overrightarrow{MK}=-3\overrightarrow{MD}+2\overrightarrow{ME}$$

Donc : $3\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MK}+2\overrightarrow{ME}$

Donc : D est le barycentre du système pondéré {(K, 1) ; (E, 2)}

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$3\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MA}$ et $3\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MK}$

Donc : : $3\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{MH}-3\overrightarrow{MD}$

$3\overrightarrow{DH}=3\left(\overrightarrow{MH}-\overrightarrow{MD}\right)$

Donc : $3\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MK}$

Donc : $(AK)\parallel(DH)$: Donc $3\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{AK}$

Exercice15 : ABC un triangle

I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI}=3\overrightarrow{BC}$

Et $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) le plan (P) est rapporté au repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

a)Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BI}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{BI}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

Donc : $\frac{1}{2}\overrightarrow{BI}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a)on a : $8\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CA}$ donc : $8\overrightarrow{CA}+8\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{CA}$

donc : $8\overrightarrow{AJ}=-7\overrightarrow{CA}$ donc : $\overrightarrow{AJ}=\frac{7}{8}\overrightarrow{AC}$

donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur

$\overrightarrow{IK}$ et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc : $\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 1-\frac{3}{2}\times 0}{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 0-\frac{3}{2}\times 1}{-1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AB}$ Donc : $\overrightarrow{AK}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$ Donc : $\overrightarrow{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$

$I\in(IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

donc : (IK): $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$

$(IK):15x-9y+21=0$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J\in(IK)$

on a : $(IK):15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

et on a : $15\times 0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

par suite : $J\in(IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice16 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et K le symétrique de A par rapport a C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?

3)Monter que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

- on a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

- on a : $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{IB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$

- on a : K le symétrique de A par rapport a C

Donc : $2\overrightarrow{KC}=\overrightarrow{KA}$

Donc : $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$1\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KB}-2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K\in(IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice17: ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$ et M et N deux points tel que :

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

1determiner le barycentre des points pondérés {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3)Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1)on a :

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$

donc : $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$

De même on a : $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{ND}$

donc : $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G\in(JM)$

De même on a : I le milieu du segment $[BC]$ alors I est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$

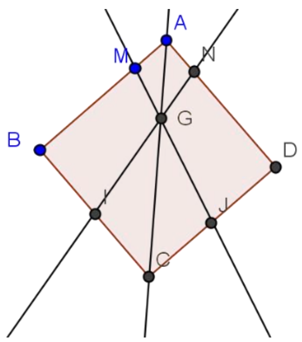
par suite : $G\in(NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc

H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$

donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H\in[AC]$ donc $G\in(AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice18: A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=3$

1)montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ et K le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;-3)$

a) Montrer que : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

b) En déduire l'ensemble (F) et le tracer

Solution :1) $M\in(F)\Leftrightarrow \frac{MA}{MB}=3\Leftrightarrow MA=3MB$

$M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)a)

$M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)=0$

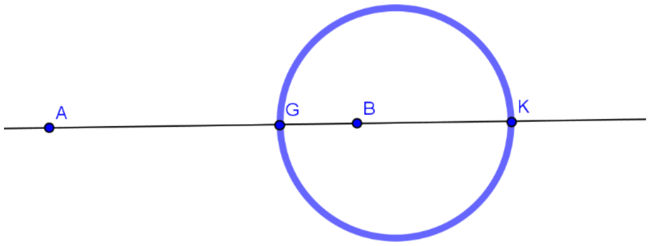
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0\Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

Donc : $M\in(F)\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

2)b) d'après a) en déduit que (F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice19: A et B deux points tel que : $AB=4cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit :(E) l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=4$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$

a)montrer que : $H\in(E)$

b)vérifier que : $M\in(E)\Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

c)déterminer la nature de l'ensemble (E)

2)soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2-MB^2=8$

a) Montrer que : $\forall M\in(P)$ on a : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$

b) En déduire que $(F)=(E)$ et le tracer

Solution :1)on a : H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$ donc : $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH}\bullet\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}AB^2=4$

Donc $H\in(E)$

b) $M\in(E)\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=4\Leftrightarrow\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IH}\bullet\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IH}\right)\bullet\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{HM}\bullet\overrightarrow{AB}=0$

c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

2)a)

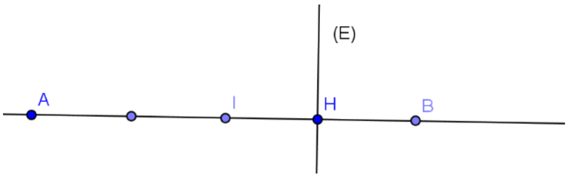
$MA^2-MB^2=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=2\overrightarrow{IM}\bullet\overrightarrow{AB}$

car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

2)b)

$M\in(F)\Leftrightarrow MA^2-MB^2=8\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{AB}=4\Leftrightarrow M\in(E)$

Donc $(F)=(E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Solution20 : A et B deux points tel que : $AB=3cm$ et I le milieu du segment $[AB]$

1)soit :(C) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2+MB^2=9$ et soit H le barycentre des points pondérés $(A;1)$;$(B;3)$

a)monter que : $M\in(C)\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C)

2)soit :(C') l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\frac{-5}{4}$

a)Montrer que : $M\in(C')\Leftrightarrow MI=1$

b)déterminer la nature et tracer l'ensemble (C')

Solution :1)on a :

$MA^2+MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2MI^2+2IA^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}\right)=2MI^2+\frac{AB^2}{2}$

Car : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$

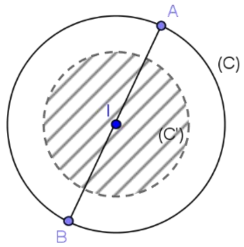
$M\in(C)\Leftrightarrow 2MI^2+\frac{AB^2}{2}=9\Leftrightarrow MI=\frac{3}{2}$

b)en déduit que (C) est le cercle de centre I et de rayon $r=\frac{3}{2}$

2) a) $\overrightarrow{MA}\bullet\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)=MI^2-\frac{AB^2}{4}$

Donc : $M\in(C')\Leftrightarrow MI=1$

2) b) en déduit que (C') est le cercle de centre I et de rayon $r=1$



Solution21 : A l'aide des barycentres, démontrer que les trois médianes d'un triangle sont concourantes et retrouver la position du centre de gravité sur les médianes.

Solution : Notons ABC le triangle, A′ le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$ et C′ le milieu de $[AB]$. Définissons finalement G l'isobarycentre de A , B et C . Alors, par associativité du barycentre, G est le barycentre de $(A,1)$ et $(A',2)$. Ainsi, G est sur la droite (AA') . De même, G est sur la droite (BB') et G est sur la droite (CC') . Ainsi, les trois droites sont concourantes en G . De plus, puisque G est le barycentre de $(A,1)$ et $(A',2)$ on a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

Solution22 :

Soit A, B, P trois points distincts du plan tels que P soit sur le segment $[AB]$. Écrire P comme barycentre de A et B avec des coefficients s'écrivant en fonction des distances PA, PB.

Solution Il suffit de remarquer que : $\overrightarrow{PB}=\frac{PB}{AB}\overrightarrow{AB}$

et que $\overrightarrow{PA}=-\frac{PA}{AB}\overrightarrow{AB}$

Ceci donne $PB\times\overrightarrow{PA}+PA\times\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

Ainsi, P est le barycentre de (A,BP) et de (B,AP) .

C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien