

## Chapitre 3

### *Barycentre dans le plan*

On se place dans le plan ou dans l'espace.

#### I/ Barycentre de deux points

##### a) Définition

##### Théorème et définition

Soient  $A$  et  $B$  deux points quelconques,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels.  
Il existe un unique point  $G$  du plan tel que  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$  si et seulement si  $\alpha + \beta \neq 0$ .  
Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés  $(A, \alpha); (B, \beta)$ . On note  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ .

##### Démonstration

Quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\iff (\alpha + \beta)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} \iff (\alpha + \beta)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

$$1/ \text{ Si } \alpha + \beta \neq 0 \text{ alors l'équation équivaut à } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}.$$

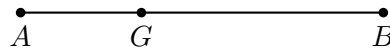
Le point  $G$  existe et est unique.

$$2/ \text{ Si } \alpha + \beta = 0 \text{ alors l'équation équivaut à } \beta\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}.$$

Cette n'équation n'admet pas de solution si  $A \neq B$  et  $\beta \neq 0$  et en admet une infinité si  $A = B$  ou  $\beta = 0$ .

Exemple : Deux points  $A$  et  $B$  étant donnés, placer  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ .

$$\begin{aligned}G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\} \\ &\iff 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \\ &\iff 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\iff 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} \\ &\iff \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$



## b) Propriétés

Dans tout le paragraphe,  $A$  et  $B$  sont deux points quelconques,  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels tels que  $\alpha + \beta \neq 0$  et  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$

## Homogénéité

## Propriété

Soit  $k$  un réel. Si  $k \neq 0$  alors  $G = \text{Bar} \{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$ .

## Démonstration

Si  $k \neq 0$  alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\} &\iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff k(\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}) = k \vec{0} \\ &\iff k\alpha \overrightarrow{GA} + k\beta \overrightarrow{GB} = \vec{0} \iff G = \text{Bar} \{(A, k\alpha); (B, k\beta)\} \end{aligned}$$

Exemple : Démontrer que l'on peut exprimer  $G$  comme barycentre de  $A$  et  $B$  de telle façon que la somme des coefficients soit égale à 1.

Si  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  alors  $G = \text{Bar} \left\{ \left( A, \frac{1}{\alpha + \beta} \alpha \right); \left( B, \frac{1}{\alpha + \beta} \beta \right) \right\}$  car  $\alpha + \beta \neq 0$ .

On a ainsi  $G = \text{Bar} \left\{ \left( A, \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right); \left( B, \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \right\}$  avec  $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 1$

## Position du barycentre

## Propriété

Si  $A$  et  $B$  sont distincts alors  $G \in (AB)$ . Autrement dit,  $A$ ,  $B$  et  $G$  sont alignés.  
Si, de plus,  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe alors  $G \in [AB]$ .

## Démonstration

$$G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\} \iff \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{GA}$  et  $\overrightarrow{GB}$  sont donc colinéaires et  $G$ ,  $A$  et  $B$  sont alignés.

De plus, on a obtenu au cours de la première démonstration le résultat suivant :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$$

or si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe alors  $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$  est positif et inférieur à 1.

Ainsi  $G \in [AB]$ .

## Propriété

Réciproquement, si  $A \neq B$ , tout point de la droite  $(AB)$  est le barycentre de  $A$  et  $B$  affectés de coefficients bien choisis.

## Démonstration

Si  $M \in (AB)$  alors  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires donc il existe un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB} &\iff \overrightarrow{AM} - k \overrightarrow{AB} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AM} - k(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) = \vec{0} \\ &\iff \overrightarrow{AM} - k \overrightarrow{AM} - k \overrightarrow{MB} = \vec{0} \iff (k - 1) \overrightarrow{MA} - k \overrightarrow{MB} = \vec{0} \end{aligned}$$

De plus,  $k - 1 - k = -1 \neq 0$  donc  $M = \text{Bar} \{(A, k - 1); (B, -k)\}$ .

## Isobarycentre

## Propriété

Si  $\alpha = \beta$ , alors  $G$  est appelé isobarycentre de  $A$  et  $B$ .  $G$  est alors le milieu du segment  $[AB]$ .

Démonstration immédiate

## Réduction vectorielle

## Propriété

Quel que soit le point  $M$ ,  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$ .

## Démonstration

Quel que soit le point  $M$ ,

$$\begin{aligned} \alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) = \alpha \overrightarrow{MG} + \alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{MG} + \beta \overrightarrow{GB} \\ &= (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB}}_{=\vec{0}} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

Exemple : Soit  $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$ . Exprimer  $\overrightarrow{AG}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$ .

L'égalité précédente pour  $M = A$  donne  $5\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AG}$ . On a donc  $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ .

## c) Coordonnées du barycentre

## Propriété

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Soit  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ .

Si  $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$  alors  $G\left(\frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}\right)$

Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

## Démonstration

Quel que soit le point  $M$ , on a  $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{MG}$ .

Cette égalité est donc valable en particulier pour  $M = O$ .

On a donc  $\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} = (\alpha + \beta) \overrightarrow{OG}$  soit  $\overrightarrow{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{OB}$

Les coordonnées de  $\overrightarrow{OA}$  sont  $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$  et les coordonnées de  $\overrightarrow{OB}$  sont  $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ .

On en déduit que les coordonnées de  $\overrightarrow{OG}$  sont  $\begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} x_A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} x_B \\ \frac{\alpha}{\alpha + \beta} y_A + \frac{\beta}{\alpha + \beta} y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \\ \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta} \end{pmatrix}$ .

Exemple : Dans un repère du plan, on a  $A(3; -2)$  et  $B(-1; 4)$ . Déterminer les coordonnées de  $G$  barycentre de  $(A, 2); (B, 3)$ .

On a :

$$\begin{cases} x_G = \frac{2 \times x_A + 3 \times x_B}{2 + 3} = \frac{2 \times 3 + 3 \times (-1)}{5} = \frac{2}{5} \\ y_G = \frac{2 \times y_A + 3 \times y_B}{2 + 3} = \frac{2 \times (-2) + 3 \times 4}{5} = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Ainsi  $G\left(\frac{2}{5}; \frac{8}{5}\right)$

## II/ Barycentre de trois points

Les définitions et propriétés du paragraphe précédent s'étendent au cas de trois points pondérés.

### a) Définition

#### Théorème et définition

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points quelconques,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels.

Il existe un unique point  $G$  du plan tel que  $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$  si et seulement si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ .

Ce point est appelé barycentre du système de points pondérés  $(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)$ . On note  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

#### Démonstration

Quels que soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  :

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}) + \gamma(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0} \\ &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{GA} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GA} = -\beta\overrightarrow{AB} - \gamma\overrightarrow{AC} \\ &\iff (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AG} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

1/ Si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  alors l'équation équivaut à

$$\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{AC}$$

Le point  $G$  existe et est unique.

2/ Si  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  alors l'équation équivaut à  $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

Cette n'équation n'admet pas de solution si  $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$  et en admet une infinité si  $\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ .

### b) Associativité du barycentre

#### Propriété

Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $\alpha + \beta \neq 0$ .

$$\text{Si } \begin{cases} G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \\ H = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\} \end{cases} \quad \text{alors } G = \text{Bar} \{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$$

**Démonstration**

Supposons que  $\begin{cases} G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \\ H = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta)\} \end{cases}$

On a alors :

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} &= \alpha\overrightarrow{GH} + \beta\overrightarrow{GH} + \gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GA} + \alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{GB} + \beta\overrightarrow{BH} + \gamma\overrightarrow{GC} \\ &= \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{AH} + \beta\overrightarrow{BH}}_{=\vec{0}} = \vec{0} \end{aligned}$$

Conclusion :

$$G = \text{Bar} \{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$$

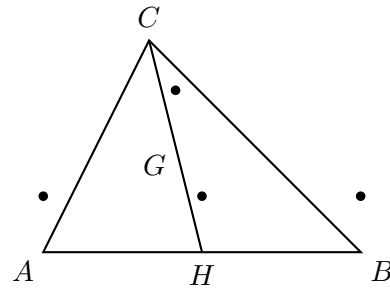
Exemple : Trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  étant donnés, placer  $G = \text{Bar} \{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ .

Posons  $H = \text{Bar} \{(A, 1); (B, 1)\}$ .  $H$  est donc le milieu de  $[AB]$ .

D'après la propriété d'associativité,

$G = \text{Bar} \{(H, 2); (C, 2)\}$ .

$G$  est donc le milieu de  $[CH]$ .

**c) Propriétés**

Dans tout le paragraphe,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points quelconques,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  trois réels tels que  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  et  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$

**Homogénéité****Propriété**

Soit  $k$  un réel. Si  $k \neq 0$  alors  $G = \text{Bar} \{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\}$ .

**Démonstration**

Si  $k \neq 0$  alors :

$$\begin{aligned} G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} &\iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff k(\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}) = k\vec{0} \\ &\iff k\alpha\overrightarrow{GA} + k\beta\overrightarrow{GB} + k\gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \\ &\iff G = \text{Bar} \{(A, k\alpha); (B, k\beta); (C, k\gamma)\} \end{aligned}$$

**Position du barycentre****Propriété**

Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés alors  $G \in (ABC)$ . Autrement dit,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $G$  sont coplanaires.

**Démonstration**

$$G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} \iff \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{GA}$ ,  $\overrightarrow{GB}$  et  $\overrightarrow{GC}$  sont donc coplanaires. Ainsi les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $G$  sont coplanaires.

**Propriété**

Réciproquement, si  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés, alors tout point du plan  $(ABC)$  est le barycentre de  $A$ ,  $B$  et  $C$  affectés de coefficients bien choisis.

*Démonstration*

Si  $M \in (ABC)$  alors il existe des réels  $k$  et  $k'$  tel que :

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AM} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{AM} + k'\overrightarrow{MC}$$

On a alors  $(1 - k - k')\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB} + k'\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

donc  $M = \text{Bar} \{(A, 1 - k - k'); (B, k); (C, k')\}$ .

**Isobarycentre****Propriété**

Si  $\alpha = \beta = \gamma$ , alors  $G$  est appelé isobarycentre de  $A$ ,  $B$  et  $C$ .  $G$  est alors le centre de gravité du triangle  $ABC$ .

*Démonstration*

Soient  $I$  le milieu de  $[BC]$  et  $J$  le milieu de  $[AC]$ .

On a alors  $I = \text{Bar} \{(B, 1); (C, 1)\}$  et  $J = \text{Bar} \{(A, 1); (C, 1)\}$ .

D'après la propriété d'associativité, on a, d'une part,  $G = \text{Bar} \{(I, 2); (A, 1)\}$  donc

$G \in (AI)$  et, d'autre part,  $G = \text{Bar} \{(J, 2); (B, 1)\}$  donc  $G \in (BJ)$ .

$G$  appartient donc à deux médianes de  $ABC$ .

$G$  est le centre de gravité de  $ABC$ .

**Réduction vectorielle****Propriété**

Quel que soit le point  $M$ ,  $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}$ .

*Démonstration*

Quel que soit le point  $M$ ,

$$\begin{aligned} \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} &= \alpha(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + \beta(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + \gamma(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \\ &= \alpha\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{MG} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{MG} + \gamma\overrightarrow{GC} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} + \underbrace{\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}}_{=\vec{0}} \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG} \end{aligned}$$

**d) Coordonnées du barycentre****Propriété**

Soit  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  un repère du plan. Soit  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  et  $C(x_C; y_C)$ .

Si  $G = \text{Bar} \{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$  alors  $G \left( \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}; \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma} \right)$

Dans un repère de l'espace, il suffit de faire le même calcul sur la troisième coordonnée.

La démonstration est identique au cas de deux points.

Exemple : Dans un repère du plan, on a  $A(2; -1)$ ,  $B(0; 3)$  et  $C(-2; 0)$ . Déterminer les coordonnées de  $G$  barycentre de  $(A, 1); (B, 3); (C, -2)$ .

On a :

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + 3 \times x_B - 2 \times x_C}{1 + 3 - 2} = \frac{2 + 3 \times 0 - 2 \times (-2)}{2} = 3 \\ y_G = \frac{y_A + 3 \times y_B - 2 \times y_C}{1 + 3 - 2} = \frac{-1 + 3 \times 3 - 2 \times 0}{2} = 4 \end{cases}$$

Ainsi  $G(3; 4)$

### III/ Barycentre d'un nombre quelconque de points

Toutes les définitions et propriétés précédentes se généralisent à  $n$  points pondérés.

- Soient  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  points et  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  réels.  
Il existe un unique point  $G$  tel que  $a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$  si et seulement si  $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$ .  
Ce point est appelé barycentre des  $n$  points pondérés  $(A_1, a_1); (A_2, a_2); \dots; (A_n, a_n)$ .
- Règle d'associativité :  
Pour trouver le barycentre  $G$ , de  $n$  points, lorsque  $n \geq 3$ , on peut remplacer  $p$  points, pris parmi les  $n$  points, par leur barycentre (s'il existe) affecté de la somme de leurs coefficients.
- Soit  $k \neq 0$ .  
 $G = \text{Bar}(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n) \iff G = \text{Bar}(A_1, ka_1), (A_2, ka_2), \dots, (A_n, ka_n)$ .  
Autrement dit, on ne change pas le barycentre en changeant les coefficients par des coefficients proportionnels.
- Si  $a_1 = a_2 = \dots = a_n \neq 0$  alors  $G$  est appelé isobarycentre des  $n$  points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .
- Pour tout point  $M$ ,

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}$$

- Dans un repère, le barycentre de  $n$  points pondérés a pour coordonnées la moyenne des coordonnées des  $n$  points pondérés par les  $n$  coefficients.

Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :

$$\begin{cases} x_G = \frac{a_1 x_{A_1} + a_2 x_{A_2} + \dots + a_n x_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \\ y_G = \frac{a_1 y_{A_1} + a_2 y_{A_2} + \dots + a_n y_{A_n}}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \end{cases}$$