

Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \cos(\pi x)$

- 1) Etudier la parité de la fonction f
- 2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+2) = f(x)$
- 3) Dédire que la fonction f est périodique

Exercice 2

Soit f la fonction numérique définie par

$$f(x) = |x-1| + |x+1|$$

- 1) Etudier la parité de la fonction f
- 2) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 2$
- 3) Résoudre l'équation $f(x) = 2$ et déduire une valeur minimale de la fonction f sur \mathbb{R}

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 + x$

- 1) Ecrire $f(x)$ sous forme canonique
- 2) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq -\frac{1}{4}$
- 3) Résoudre l'équation $f(x) = -\frac{1}{4}$ et déduire une valeur minimale de la fonction f sur \mathbb{R}

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

- 1) Déterminer D_f .
- 2) Etudier la parité de la fonction f .
- 3) Déterminer le signe de $(f(x))^2 - 4$ et déduire que la fonction f admet une valeur maximale sur D_f .

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

- 1) Déterminer D_f
- 2) Vérifier que $\forall x \in D_f \quad f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x+1}}$
- 3) Montrer que f est décroissante sur D_f
- 4) Montrer que $\forall x \in D_f \quad 0 < f(x) \leq 1$
- 5) Calculer $f(-1)$ et déduire que 1 est une valeur maximale de la fonction f sur D_f

Exercice 6

Soit f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \sqrt{x-1}$

Et $g(x) = \frac{x}{x+2}$

- 1) Déterminer $D_{f \circ g}$ et $D_{g \circ f}$
- 2) Donner l'expression de $(f \circ g)(x)$ pour tout $x \in D_{f \circ g}$

Exercice 7

Ecrire la fonction f sous forme de la composée de deux fonctions u et v dans les cas suivants :

- 1) $f(x) = \sqrt{1-2x}$
- 2) $f(x) = (2x+1)^2$
- 3) $f(x) = \frac{|x|-2}{|x|+3}$
- 4) $f(x) = 2\sqrt{x^2+3}$

Exercice 8

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = 3x - 5 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1}$$

- 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 1 + \frac{x^2}{x^2 + 1}$
- 2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 2 - \frac{x^2}{x^2 + 1}$
Et déduire que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 \leq g(x) \leq 2$
- 3) La fonction f est-elle bornée sur \mathbb{R} ?
- 4) Montrer que la fonction $g \circ f$ est bornée sur \mathbb{R}
- 5) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -2 \leq (g \circ f)(x) \leq 1$

Exercice 9

1) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par : $f(x) = x^2 + 2x$

- a. Déterminer la monotonie de la fonction f sur \mathbb{R}^+
- b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) \geq 0$

2) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par : $g(x) = -1 + \sqrt{1+x}$

- a. Déterminer la monotonie de la fonction g sur \mathbb{R}^+
- b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad g(x) \geq 0$.

3) Calculer $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}^+$.

4) Représenter dans la même repère orthonormée (C_f) et (C_g)
Et la droite d'équation $y = x$.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = 2\cos x - x$

- 1) a) montrer pour tout x de $I = [0; \pi] \quad -\pi - 2 \leq f(x) \leq 2$
b) étudier la monotonie de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur l'intervalle I .
c) déduire la monotonie de la fonction f .

2) On pose : $g(x) = f(4x)$

Etudier la monotonie de la fonction g sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

3) On pose : $h(x) = (2\cos x - x)^2$

- a. Déterminer une fonction u vérifiant $h = u \circ f$.
- b. Déterminer la monotonie de u sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.