

FONCTIONS - Généralités

Leçon : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

- 1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions.
- 2) Fonctions paires et Fonctions impaires
- 3) Les variations d'une fonction numérique
- 4) Les variations d'une fonction et la parité d'une fonction
- 5) Les variations des deux fonctions : αf et $f+\alpha$
- 6) comparer deux fonctions (fonctions positives et négatives) Fonctions majorées ; minorées ; bornée
- 7) Les extremums d'une fonction numérique
- 8) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme du 2iem degré: $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$
- 9) Etude et représentation graphique de la fonction homographique : $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$
- 10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$
- 11) Etude et représentation graphique de la fonction : $x \xrightarrow{f} \sqrt{x+a}$
- 12) La composée de deux fonctions
- 13) Fonctions périodiques

1) Définitions d'une fonction et Domaine de définitions

1-1) Définition :

Une **fonction** est un procédé qui à un nombre x appartenant à un ensemble D associe un

nombre y . On note : $x \xrightarrow{f} y$

ou encore $f : x \mapsto y$

ou encore $y = f(x)$

- On dit que y est l'image de x par la fonction f
- On dit aussi que x est un antécédent de y par la fonction f

1-2) Exemples

Exemple1 :

a) Les fonctions numériques sont, le plus souvent, définies par une expression mathématique, comme par exemple :

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 \quad \text{ou} \quad g(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{5x^2 - 4}.$$

$$\text{Ou } h(x) = \frac{2x-1}{5x-4} \quad \text{ou} \quad l(x) = \sqrt{x}$$

$$R(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\tan x}$$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique

Une fonctions homographique s'écrit sous la

$$\text{forme : } h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple2 :

Soit la fonction f définie par , $f(x) = 3x^2 - 1$

1) Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par f .

2) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f ,

Réponses : 1) $f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ et

$$f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

2) $f(x) = 2$ ssi $3x^2 - 1 = 2$

ssi $3x^2 = 2 + 1$ ssi $3x^2 = 3$ ssi $x^2 = 1$

ssi $x = -1$ ou $x = 1$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

1-3) Domaine de définitions activités

a. On considère la fonction définie

par : $x \mapsto \frac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie

par : $x \mapsto \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie

par : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Définition

Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image calculable par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera Df

Exemple 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$. 2) $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$.

3) $f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x) = \sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$.

14) $f(x) = \frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. 15) $f(x) = \frac{2\sin x}{2\cos x - 1}$.

16) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

17) $f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$

18) $f(x) = \frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

19) $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}$.

Solutions

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$

f Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\}$

$2x-4=0$ ssi $x = \frac{4}{2} = 2$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \neq 0\}$

$x^2-4=0$ ssi $x^2-2^2=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

4) $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3-2x \neq 0\}$

$x^3-2x=0$ ssi $x(x^2-2)=0$ ssi $x=0$ ou

$x^2-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^2=2$

ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$

5) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\}$

$-3x+6 \geq 0$ ssi $x \leq 2$ ssi $x \leq \frac{-6}{-3}$ ssi $-3x \geq -6$

Donc $D_f =]-\infty; 2]$

6) $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-5x-3 \neq 0\}$

$$2x^2 - 5x - 3 = 0 \quad a = 2 \text{ et } b = -5 \text{ et } c = -3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7 + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5 - 7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$$

$$7) f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - 3x + 1 \geq 0\} \text{ soit } \Delta \text{ son discriminant}$$

$$a = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Donc } D_f = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$$

$$8) f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}.$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \right\}$$

$$-9x+3=0 \text{ ssi } x = \frac{1}{3} \text{ ssi } -9x = -3$$

$$x+1=0 \text{ ssi } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$-9x+3$	$+$	$+$	0	$-$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-9x+3}{x+1}$	$-$	$+$	0	$-$

$$\text{Donc } D_f = \left] -1, \frac{1}{3} \right]$$

$$9) f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2 + x + 3 > 0\}$$

$$-2x^2 + x + 3 = 0 \quad a = -2 \text{ et } b = 1 \text{ et } c = 3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$$

Donc on a deux racines

$$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	-1	$3/2$	$+\infty$	
$-2x^2+x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Donc } D_f = \left[-1, \frac{3}{2} \right]$$

$$10) f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0\}$$

$$x^2+1=0 \text{ ssi } x^2 = -1$$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

$$11) f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}.$$

$$f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } \sqrt{|x|} \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq 0$$

Or on sait que $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Donc } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

$$12) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}. \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ et } x \neq 1\}$$

$$D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$13) f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ et } x \neq 0\}$$

$$D_f =]-\infty, 0[$$

$$14) f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}.$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0\}$$

$$|2x-4| - |x-1| = 0 \text{ ssi } |2x-4| = |x-1|$$

$$\text{ssi } 2x-4 = x-1 \text{ ou } 2x-4 = -(x-1)$$

$$\text{ssi } 2x-x = 4-1 \text{ ou } 2x-4 = -x+1$$

$$\text{ssi } x = 3 \text{ ou } 2x+x = 4+1$$

$$\text{ssi } x = 3 \text{ ou } 3x = 5 \text{ ssi } x = 3 \text{ ou } x = \frac{5}{3}$$

$$\text{Donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$$

$$15) f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1} \cdot D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 \cos x - 1 \neq 0\}$$

$$2 \cos x - 1 = 0 \text{ ssi } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc: } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$16) f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6}}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2 + 2x + 13}{x^2 - x - 6} \geq 0 \text{ et } x^2 - x - 6 \neq 0\right\}$$

- On détermine les racines du trinôme

$$-2x^2 + 2x + 13:$$

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 + 3\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1 - 3\sqrt{3}}{2}$$

- On détermine les racines du trinôme $x^2 - x - 6$:

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$ et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \text{ et}$$

$$x_2' = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$	-2	3	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2+2x+13$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^2-x-6	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	0	$-$

$$D_f = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2\right] \cup \left[3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$17) f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6} \geq 0\right\}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2\sqrt{6}$$

$$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$$

$$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

On a $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$ donc

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	0	+

On a donc : $D_f =]-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

$$18) f(x) = \frac{|x-4| - |x-1|}{x^2 + 2|x| - 3}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2|x| - 3 \neq 0\}$$

$$x^2 + 2|x| - 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x| - 3 = 0 \text{ on pose}$$

$|x| = X$ donc l'équation devient :

$$X^2 + 2X - 3 = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$ et ses solutions sont :

$$X_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3 \text{ et } X_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

Donc on a : $|x| = -3$ et $|x| = 1$

$|x| = -3$ n'a pas de solution

$|x| = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$ donc $D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$

$$19) f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{3-5x}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-1 \geq 0 \text{ et } 3-5x \geq 0\}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{1}{2} \text{ et } x \leq \frac{3}{5}\right\}$$

$$\text{Donc } D_f = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$$

2) Fonctions paires et Fonctions impaires

2.1 Définitions

a. Ensemble de définition centré

Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition : On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et seulement si :

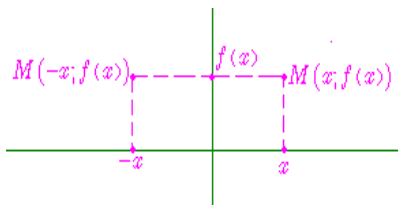
Pour tout réel x, si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$.

Exemples d'ensembles centrés	Exemples d'ensembles non centrés
$]-\infty, +\infty[$	$]0, +\infty[$
$^{\circ} * \text{ (ou } ^{\circ} -\{0\})$	$^{\circ} -\{1\}$
$^{\circ} -\{-1; 1\}$	$^{\circ} -\{-1; 2\}$
$[-4; 4]$	$[-4; 3]$

2.2. Fonction paire

On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel x de D_f on a : $f(-x) = f(x)$



Remarques :

- si n est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x) = kx^n$ est paire.
- (c'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)
- la fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire,
- la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,
- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,
- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,
- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,
- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

2.3. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

- si n est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \tan x$ est impaire,
- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,

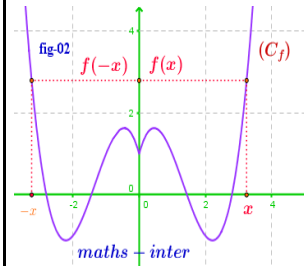
prof : atmani najib

- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

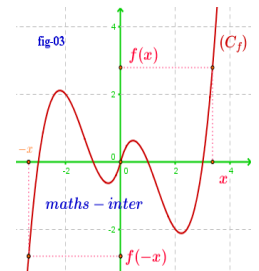
2.4 le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Fonction paire



Fonction impaire



Exemple 1 :

- 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 - 5$

Donc $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$
- $f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$
- $f(-x) = f(x)$

Donc f est une fonction paire,

- 2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{3}{x}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$$

$$g(-x) = -g(x)$$

Donc g est une fonction impaire,

- 3) Soit h une fonction tq : $h(x) = 2x^3 + x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$$

$$h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

- 4) Soit t une fonction tq : $t(x) = \frac{x}{x-2}$

on a $t(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_t = \mathbb{R} - \{2\}$

on a $-2 \in D_f$ mais $-(-2) = 2 \notin D_f$

Donc D_f n'est pas symétrique par rapport à O

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

Exemple 2 :

Etudier la parité des fonctions suivantes définie par :

$$1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad 2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$3) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \quad 4) f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5} \quad 6) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$7) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

Solutions : 1) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$- f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

$$2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R}^*$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$- f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x} = \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

$$3) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, alors

$$-x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$- f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$4) f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 \geq 0\}$$

$$1 - x^2 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\text{Donc } D_f = [-1, 1]$$

- Pour tout réel x , si $x \in [-1, 1]$, alors

$$-x \in [-1, 1]$$

$$- f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 \neq 0\}$$

$$x^2 + 5 = 0 \text{ ssi } x^2 = -5 \text{ pas de solutions}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$- f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 5} = \frac{-2x^3}{x^2 + 5}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire

$$6) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4 \geq 0\}$$

Or on sait que $2x^2 \geq 0$ Pour tout réel x , donc

$$2x^2 + 4 \geq 0 + 4 \text{ donc } 2x^2 + 4 \geq 4 \geq 0$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$- f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2 + 4} = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$7) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \quad \text{Donc}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

On a $2 \in \mathbb{R}^+$ mais $-2 \notin \mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exemple 3 : Soit la fonction définie par :

$$5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x \text{ Pour tout réel } x$$

1) montrer que f est une fonction impaire

2) donner une expression de $f(x)$ Pour tout réel x

Solution : soit $x \in \mathbb{R}$

On a $5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$ (1)

Pour tout réel x

On remplaçant x par $-x$ on trouve :

$$5f(-x) + f(x) = 2(-x)^3 - 3(-x)$$

Donc : $5f(-x) + f(x) = -2x^3 + 3x$ (2)

(1) + (2) donne : $6(f(-x) + f(x)) = 0$ donc :

$$f(-x) + f(x) = 0$$

donc : $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc f est une fonction impaire

2) on a : $5f(x) + f(-x) = 2x^3 - 3x$

Et puisque f est une fonction impaire donc :

$$5f(x) - f(x) = 2x^3 - 3x$$

$$4f(x) = 2x^3 - 3x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x$$

Exemple 4 : Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{|x|+1}{2|x|-3} \text{ et } (C_f) \text{ la courbe de } f \text{ Dans le}$$

repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ orthonormé

Montrer que (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

Solution : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2|x|-3 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq \frac{3}{2}\}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$

Il suffit de montrer que f est une fonction paire

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ alors

$$-x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right\}$$

$$-f(-x) = \frac{|-x|+1}{2|-x|-3} = \frac{|x|+1}{2|x|-3} = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

Par suite la (C_f) symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

3) Les variations d'une fonction numérique

3-1) Sens de variation d'une fonction : fonction croissante -décroissante - fonction constantes

Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors
 $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leq f(x_2)$)

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$ alors
 $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)

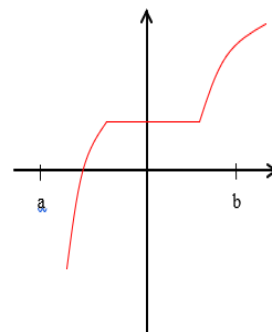
Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que :

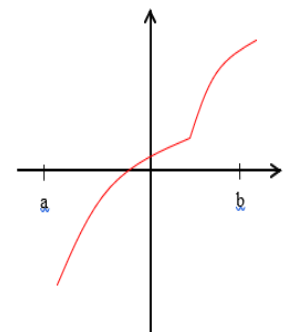
Si $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ tq $x_1 < x_2$
 alors $f(x_1) = f(x_2)$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Fonction croissante sur $[a, b]$, mais non strictement croissante



Fonction strictement croissante sur $[a, b]$

Exemples : 1) Soit f une fonction tq :

$$f(x) = 7x - 5$$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc $7x_1 < 7x_2$ car $7 > 0$

Donc $7x_1 - 5 < 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) < f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a) Soit $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$ tq $x_1 < x_2$

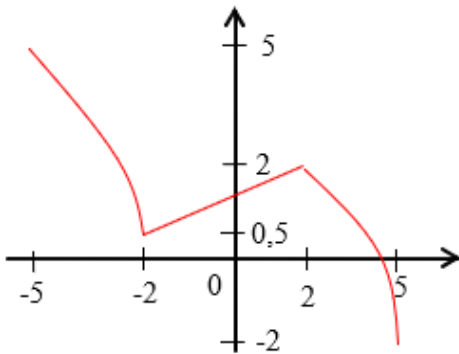
Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $]-\infty; 0]$

b) tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

3)



x	-5	-2	2	5
$f(x)$	5	0,5	2	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement constante sur I ssi il existe un réel k tq: $f(x) = k$

pour tout $x \in I$

3-2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a) Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1; x_2)$ est tq :

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

Exemple : Soit f une fonction tq :

$$f(x) = 3x^2 + 2$$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

• On dit que f est strictement croissante(croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$

et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

$$\left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \right)$$

• On dit que f est strictement décroissante(décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \quad \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \right)$$

• On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$$

Exemples :

1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$$T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2)$$

a) Soit $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0; +\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $]-\infty; 0]$

b) **résumé : tableau de variation :**

$$f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		2	

2) Soit f une fonction tq : $g(x) = \frac{x}{x+1}$ on

a) $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x+1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$$T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a) sur $I =]-\infty; -1[$

Soit $x_1 \in]-\infty; -1[$ et $x_2 \in]-\infty; -1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 < -1$ et $x_2 < -1$ Donc $x_1 + 1 < 0$ et

$x_2 + 1 < 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$ sur

$I =]-\infty; -1[$

d'où g que est strictement croissante sur

$I =]-\infty; -1[$

b) sur $J =]-1; +\infty[$

Soit $x_1 \in]-1; +\infty[$ et $x_2 \in]-1; +\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 > -1$ et $x_2 > -1$ Donc $x_1 + 1 > 0$

et $x_2 + 1 > 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

$$\text{Donc } T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$$

sur $J =]-1; +\infty[$

d'où g que est strictement croissante sur

$J =]-1; +\infty[$

c) **résumé : tableau de variation :**

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

3-3) les variations et la parité :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I

Si f est paire alors :

- f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'

- f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

- f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'

- f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Conséquences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Exemple : Soit f une fonction : tq : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1; x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f

tq $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I =]0; 1]$ puis sur $J = [1; +\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

$$2) f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2}$$

$$= \frac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2}$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$$

a) sur $I =]0; 1]$ Soit $x_1 \in]0; 1]$ et $x_2 \in]0; 1]$

Donc $0 < x_1 \leq 1$ et $0 < x_2 \leq 1$ $x_2 + 1 < 0$

Donc $0 < x_1 x_2 \leq 1$ et $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 x_2 - 1 < 0$

et on a $0 < x_1 x_2$ Donc $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} < 0$

d'où f que est strictement décroissante sur $I =]0; 1]$

b) sur $J = [1; +\infty[$ Soit $x_1 \in [1; +\infty[$ et $x_2 \in [1; +\infty[$

Donc $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ Donc $x_1 x_2 \geq 1$ et

$x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 x_2 > 1$ Donc $x_1 x_2 - 1 > 0$

et on a $0 < x_1 x_2$ Donc $T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} > 0$

d'où f que est strictement croissante sur $J = [1; +\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I =]0; 1]$ est

l'intervalle $I' = [-1; 0[$ et le symétrique de

$J = [1; +\infty[$ est l'intervalle $J' =]-\infty; -1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I

Donc f est strictement décroissante sur I'

f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 2$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$		-2		2	

$$f(-1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$$

5) Les variations des deux fonctions : αf et $f + \alpha$

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

• Si $\alpha \in \mathbb{R}^{**}$ alors les fonctions f et αf ont les mêmes variations sur I

• Si $\alpha \in \mathbb{R}^{*-}$ alors les fonctions f et αf ont des variation opposées sur I

• f et $\alpha + f$ ont les mêmes variations sur I

Exemples :

1) soit la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{6}{x}$$

On sait que la fonction $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ est

décroissante sur $[0; +\infty[$ et puisque $6 > 0$ donc la fonction $g = 6f$ est aussi décroissante sur $[0; +\infty[$

2) Soit f et g les fonction numérique :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{2}x^2 \quad D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5$$

On a $a = -\frac{1}{2} < 0$ Donc alors les fonctions f et

g ont des variation opposées sur $\mathbb{R}$

g et h ont les mêmes variations sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

6) comparaison deux

fonctions (fonctions positives et négatives)

Fonctions majorées ; minorées et bornée :

6-1) Comparaison de fonctions

Définition 1 : On dit que deux fonction f et g sont égales si et seulement

si : Elles ont même ensemble de définition :

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

et Pour tout $x \in D_f$: $f(x) = g(x)$ et On écrit :

$$f = g$$

Exemple : Les fonction f et g définies respectivement par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}}$$

Sont-elles égales ?

Réponse :

Déterminons leur ensemble de définition :

Pour f , on doit avoir : $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$ et $x-1 \neq 0$

donc ce qui donne $D_f =]-\infty; -3[\cup [1; +\infty[$

Pour g, on doit avoir $x-1 \geq 0$ et $x+3 > 0$

ce qui donne $D_g = [1; +\infty[$

On a donc $D_f \neq D_g$. Les fonctions ne sont donc pas égales. On écrit : $f \neq g$

On remarquera cependant que sur $[1; +\infty[$

on a $f(x) = g(x)$

6-2) Définitions : Soit I un intervalle et soient f et g deux fonctions définies

Sur I. On dit que :

1)f est inférieure à g sur I lorsque : $f(x) \leq g(x)$

pour tout $x \in I$. On note : $f \leq g$ Sur I.

2)f est positive sur I lorsque : $f(x) \geq 0$ pour tout

$x \in I$. On note : $f \geq 0$ sur I.

3)f est **majorée** sur I lorsqu'il existe un réel M tel que : $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$

4)f est **minorée** sur I lorsqu'il existe un réel m tel que : $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$

5)f est **bornée** sur I lorsqu'il existe des réels Met m tels que : $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in I$.

(f est majorée et minorée)

Interprétation graphique :

1) $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe (C_g) de la fonction g est au-dessus de La courbe (C_f) de f sur l'intervalle I

2) $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ ssi La courbe (C_f) de la fonction f est au-dessus de l'axe des abscisse sur l'intervalle I

6-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f et g les fonctions numériques tel que: $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2 + x + 2$

Comparer les fonctions f et g

Solution : $D_f = D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) - f(x) = x^2 + x + 2 - (x+1) = x^2 + 1 > 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Donc : $f(x) < g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f < g$

Exemple2 Soit f et g les fonctions numériques

tel que: $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

Comparer les fonctions f et g

Exemple3 Soient les deux

fonctions : $f(x) = \frac{3x^2+1}{\sqrt{x^2}}$ et $g(x) = \frac{1+3x^2}{|x|}$

- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

or on sait que $x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $|x| \neq 0$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

alors $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2} = |x|$ et $3x^2+1 = 1+3x^2$ donc

$f(x) = g(x)$

donc finalement on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

et $f(x) = g(x)$

Donc : $f = g$.

Exemple4 Soient les deux

fonctions : $h(x) = \frac{x^2-x}{x}$ et $t(x) = x-1$

- on a $h(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$

- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t = \mathbb{R}$

Exemple5 Soit f la fonction numérique tel que:

$$f(x) = \frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$$

Etudier le signe de la fonction f

Solution : $4x^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq \frac{1}{2}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$3x+1$	-	-	0	+	+	+	
$2-x$	+	+	+	+	0	-	
$2x-1$	-	-	-	0	+	+	
$2x+1$	-	0	+	+	+	+	
$\frac{(3x+1)(2-x)}{4x^2-1}$	-	+	0	-	+	0	-

$$f(x) \geq 0 \text{ ssi } x \in \left] -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{1}{2}; 2 \right] \text{ donc } f \geq 0$$

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right] \cup \left] \frac{1}{2}; 2 \right]$$

$$f(x) \leq 0 \text{ ssi } x \in \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right[\cup [2; +\infty[$$

Exemple6 Soit f une fonction numérique

définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + x$

Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

Solution : On met la fonction sous la forme canonique :

$$f(x) = -x^2 + x = -(x^2 - x) = -\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \right) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$$\text{On a : } -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \text{ donc } -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{donc : } f(x) \leq \frac{1}{4} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La fonction f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = \frac{1}{4}$

Exemple7 Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4\sin x - 3$ est Bornée.

Solution : On a $\forall x \in \mathbb{R} -1 \leq \sin x \leq 1$ donc

$$-4 \leq 4\sin x \leq 4$$

$$\text{donc } -4 - 3 \leq 4\sin x - 3 \leq 4 - 3$$

$$\text{donc } -7 \leq g(x) \leq 1 \text{ g est donc bornée sur } \mathbb{R}.$$

Exemple8 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.

3) Démontrer que f est minorée sur $\mathbb{R}$.

Conclure

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$

$$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ pas de solution dans } \mathbb{R}$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R}$$

$$2) \text{ On a } \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0 \text{ donc } x^2 + 1 \geq 0 + 1$$

$$\text{Donc } x^2 + 1 \geq 1 \text{ donc } \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1$$

$$\text{donc } f(x) \leq 1 \text{ par suite f est donc majorée sur } \mathbb{R} \text{ par } M = 1$$

$$2) \text{ On a } \forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0 \text{ donc } x^2 + 1 \geq 0 + 1$$

$$\text{Donc } x^2 + 1 \geq 1 \text{ donc } x^2 + 1 > 0$$

$$\text{Donc : } 0 < f(x)$$

$$\text{par suite f est donc minorée sur } \mathbb{R} \text{ par } m = 0$$

prof : atmani najib

$$\text{conclusion : } 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple9 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3}$$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée par 1.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{7}{3}$. Conclure

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 3x + 3 \neq 0\}$

$$\Delta = -3 < 0 \text{ pas de solution dans } \mathbb{R} \text{ donc } D_f = \mathbb{R}$$

2) soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - 1 = \frac{2x^2 + 7x + 7 - (x^2 + 3x + 3)}{x^2 + 3x + 3} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 3}$$

$$f(x) - 1 = \frac{(x+2)^2}{x^2 + 3x + 3} \text{ or } x^2 + 3x + 3 > 0 \text{ car } \Delta = -3 < 0$$

(signe de a=1)

$$\text{Et on a : } (x+2)^2 \geq 0 \text{ donc } f(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 1$

2) soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - \frac{7}{3} = \frac{2x^2 + 7x + 7}{x^2 + 3x + 3} - \frac{7}{3} = \frac{-x^2}{3(x^2 + 3x + 3)} \leq 0$$

$$\text{par suite f est majorée par } \frac{7}{3}.$$

$$\text{conclusion : } 1 \leq f(x) \leq \frac{7}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple10 Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 + x + m} \text{ avec } m \in \mathbb{R}$$

1) déterminer les valeurs de m pour que $D_f = \mathbb{R}$

2) Soit g la fonction numérique tq :

$$g(x) = \frac{1}{x+2} \text{ déterminer les valeurs de m pour}$$

$$\text{que } \forall x \in \{-2; 1\} \text{ on a : } f(x) = g(x)$$

Solution :

$$1) D_f = \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + m \neq 0$$

$$x^2 + x + m \neq 0 \text{ ssi } \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4m < 0$$

$$\text{Ssi } m > \frac{1}{4}$$

$$2) f(x) = g(x) \quad \forall x \in \{-2; 1\} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1}{x^2 + x + m} = \frac{1}{x+2}$$

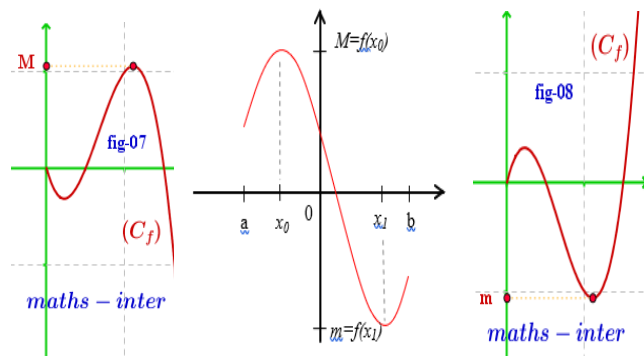
$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) = x^2 + x + m \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x - 2 = x^2 + x + m$$

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in \{-2; 1\} \Leftrightarrow -2 = m$$

7) Les extremums d'une fonction Numérique

7-1) Définitions :



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout $x \in I$: $f(x) \leq f(a)$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x \in I$: $f(x) \geq f(a)$

7-2) Exemples d'applications :

1° Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = 5x^2 + 3 \quad D_f = \mathbb{R}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$ Donc $5x^2 \geq 0$ car $5 > 0$

Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq f(0)$

d'où $f(0) = 3$ est un minimum absolue de f sur $\mathbb{R}$

2° Soit g une fonction numérique tq :

$$g(x) = -4x^2 + 1 \quad D_g = \mathbb{R}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$ Donc $-4x^2 \leq 0$ car $-4 < 0$

Par suite $-4x^2 + 1 \leq 1$ et on a $g(0) = 1$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq g(0)$

d'où $g(0) = 1$ est un maximum absolue de g sur $\mathbb{R}$

7-3) Exemples :

Exemple1 : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = -4x^2 + 4x + 5$$

1°a) montrer que $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) \leq 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les

extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Réponses: 1°a) on a $D_f = \mathbb{R}$

$$6 - (2x - 1)^2 = 6 - (4x^2 - 4x + 1)$$

$$= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5$$

Donc : $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$

b) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x - 1)^2 \geq 0$

Par suite $-(2x - 1)^2 \leq 0$ donc $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 6$

2° on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1 - 1)^2 = 6$

on a pour tout $x \in \mathbb{R} \quad 6 - (2x - 1)^2 \leq 6$ alors

$$f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

Exemple2 : Du tableau de variation on a :

x	-5	-2	2	5
$f(x)$	5	0,5	2	-2

Le nombre 2 est une valeur maximale de f au point $x_0 = 2$

Le nombre 0.5 est une valeur Minimale de f au point $x_0 = -2$

Exemple3 :

Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Montrer que 1 est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Solution : $D_f = \mathbb{R}$

Montrons donc que : $f(x) \leq 1$ et que l'équation

$f(x) = 1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

$$f(x) - 1 = -x^2 + 4x - 3 - 1 = -x^2 + 4x - 4$$

$$f(x) - 1 = -(x^2 - 4x + 4) = -(x - 2)^2 \leq 0$$

Donc $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(x)=1 \Leftrightarrow f(x)-1=0 \Leftrightarrow -(x-2)^2=0 \Leftrightarrow x=2$$

Donc l'équation $f(x)=1$ admet une solution dans $\mathbb{R}$

Et on a : $f(2)=1$ donc : $f(x) \leq f(2) \forall x \in \mathbb{R}$

que $f(2)=1$ est le maximum absolu de f sur $\mathbb{R}$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$$

1) Déterminer D_f

2) a) Démontrer que f est majorée par 3.

b) est ce que 3 est une valeur maximale de f ?

3) a) Démontrer que f est minorée par 2.

b) est ce que 2 est une valeur minimale de f ?

Solution :

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0\}$$

$x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1$ pas de solution dans $\mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

2) a) soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 3 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 3 = \frac{2x^2 + 3 - 3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 3x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(x) - 3 = \frac{-x^2}{x^2 + 1} \leq 0 \text{ par suite } f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 3$

b) on remarque que : $f(0) = 3$

$$\text{donc } f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc 3 est une valeur maximale de f

2) a) soit $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) - 2 = \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 1} - 2 = \frac{2x^2 + 3 - 2(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 2}{x^2 + 1}$$

$$\text{Donc } f(x) - 2 = \frac{1}{x^2 + 1} > 0 \text{ par suite :}$$

$$0 < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

par suite f est donc minorée sur $\mathbb{R}$ par $m = 2$

b) on remarque que : $f(x) > 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2 n'est pas donc une valeur minimale de f

$$\text{conclusion : } 2 < f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Exemple5 : Soit f une fonction numérique définie

$$\text{sur }]1; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

1) étudier le signe de f

2) a) Démontrer que f est majorée par $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) est ce que $\frac{\sqrt{2}}{4}$ est une valeur maximale de f ?

Solution : 1) soit $x \in]1; +\infty[$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$f(x) = \frac{x+1-2}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} > 0$$

Donc $f(x) > 0$ si $x \in]1; +\infty[$

2) a) $x \in]1; +\infty[$ montrons que $f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$

soit $x \in]1; +\infty[$ donc $x > 1$ cad $x+1 > 2$

donc $\sqrt{x+1} > \sqrt{2}$ donc $\sqrt{x+1} + \sqrt{2} > 2\sqrt{2}$

$$\text{donc } \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{2}} < \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{donc } f(x) < \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in]1; +\infty[$$

f est donc majorée sur $\mathbb{R}$ par $M = 3$

conclusion : $2 < f(x) \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) on remarque que : $f(0) = 3$

$$\text{donc } f(x) \leq f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Donc 3 est une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1; +\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in]1; +\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ N'est pas une valeur maximale de f

Exemple6 : Soit f une fonction numérique

$$\text{définie sur }]1; +\infty[\text{ par : } f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que -1 est la valeur minimal de f

3) Démontrer que f est majorée par 1 et est ce que 1 est une valeur maximale de f ?

Solution : 1)

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} + 2 \neq 0 \text{ et } x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \neq -2 \text{ et } x \geq 0\}$$

$$D_f = [0; +\infty[$$

2) Montrons donc que : $f(x) \geq -1$ et que l'équation $f(x) = -1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

$$f(x) - (-1) = f(x) + 1 = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} + 1 = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \geq 0$$

Donc $f(x) \geq -1 \forall x \in \mathbb{R}^+$ et on a :

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow f(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Donc l'équation $f(x) = -1$ admet une solution dans $\mathbb{R}^+$

Et on a : $f(0) = -1$ donc : $f(x) \geq f(0) \forall x \in \mathbb{R}$

On dit que $f(0) = -1$ est le minimum absolu de f sur $\mathbb{R}^+$

$$3) \text{ soit } x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) - 1 = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} - 1 = \frac{-4}{\sqrt{x} + 2} < 0$$

Donc $f(x) < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Donc f est donc majorée sur $\mathbb{R}^+$ par $M = 1$

Et puisque $f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}^+$

Donc 1 n'est pas une valeur maximale de f

f est donc bornée sur $]1; +\infty[$ par $\frac{\sqrt{2}}{4}$

b) puisque $f(x) \neq \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \forall x \in]1; +\infty[$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ n'est pas une valeur maximale de f

Exemple 7 : Soit f une fonction numérique tel que : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1)a) Démontrer que f est minorée.

b) est ce que f admet une valeur minimale ?

2) Démontrer que f est non majorée.

Solution : $D_f = \mathbb{R}$

$$1)a) \quad f(x) = x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 1) + 2 = (x - 1)^2 + 2$$

$$\text{Donc } f(x) - 2 = (x - 1)^2 \geq 0$$

donc : $f(x) \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc que f est minorée par 2

et on a : $f(1) = 2$ donc : $f(x) \geq f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

donc f admet une valeur minimale c'est 2

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 + 2 \leq M$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (x - 1)^2 \leq M - 2$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{(x - 1)^2} \leq \sqrt{M - 2} \quad (\text{on peut toujours supposer } M \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq \sqrt{M - 2}$$

$$\text{Donc on a : } -\sqrt{M - 2} \leq x - 1 \leq \sqrt{M - 2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc on a : } -\sqrt{M - 2} + 1 \leq x \leq \sqrt{M - 2} + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ absurde}$$

Donc f est non majorée

8) Etude et représentation graphique des fonctions $x \mapsto ax^2 + bx + c$

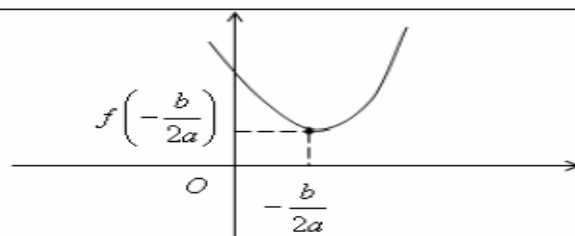
8-1) Résumé : $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $a \neq 0$

1° Dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

2° Les variations de f

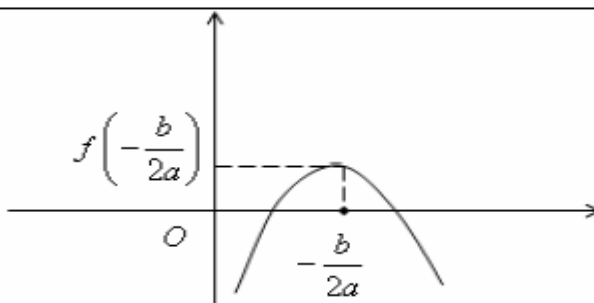
Si $a > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\swarrow \quad \searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$		



Si $a < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\swarrow \quad \searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$		



2-2) Exemples :

1° Soit f une fonction numérique

$$tq : f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = 2$ et $b = -4$ et $c = -2$

$$(f(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 2} = 1 \text{ et } (f(1) = 2 - 4 - 2 = -4)$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x-1)^2 - 4$$

Soit $W(1; -4)$ Donc dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$:

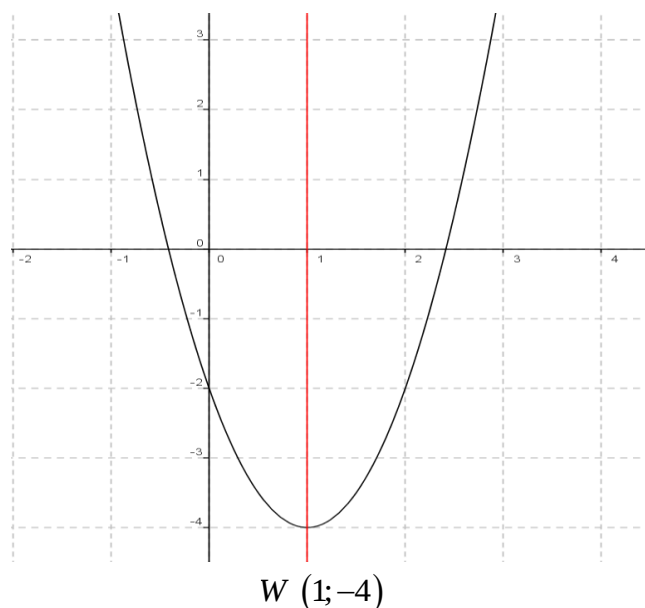
la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1; -4)$

et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Tableau de variations de f

On a $a = 2 > 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$



prof : atmani najib

2° Soit g une fonction numérique tq :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g = \mathbb{R}$

On a $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2$ et $c = 1$

$$(g(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = 2 \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4+2}{-2} = 3$$

Donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la

$$\text{forme : } g(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$$

$$(g(2) = -\frac{1}{2}(2-2) + 3 = 3)$$

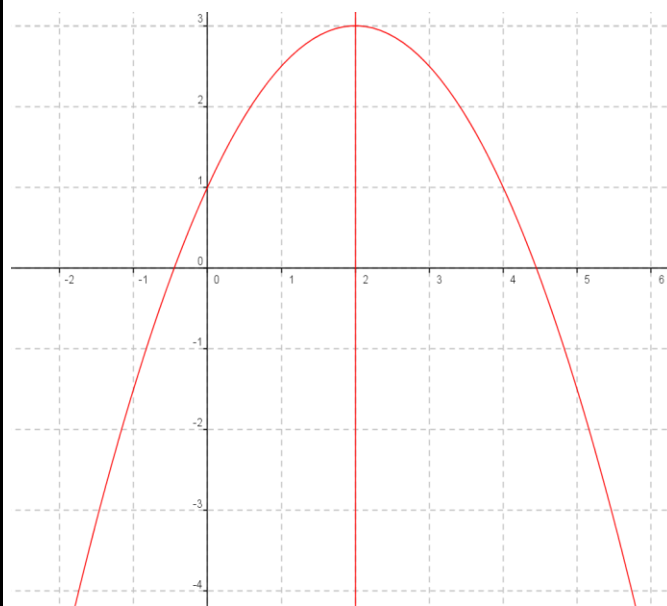
Soit $W(2; 3)$ Donc dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la

courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2; 3)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 2$

Tableau de variations de g

On a $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$



[http:// abcmaths.e-monsite.com](http://abcmaths.e-monsite.com)

9) Etude et représentation graphique des fonctions homographiques :

$$x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d} \quad a \neq 0 \text{ et } c \neq 0$$

9-1) Résumé et propriété : 1) Soit f une fonction

$$\text{tq : } f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } cx+d \neq 0$$

$$\text{ssi } x \neq -\frac{d}{c} \quad \text{donc : } D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$$

dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de

centre $W\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites

d'équations respectives $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$

1^{ier} cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$			

2^{ier} cas : si $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$			

9-2) Exemples :

Exemple1: Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \{1\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3 < 0$$

• Donc le tableau de variations de

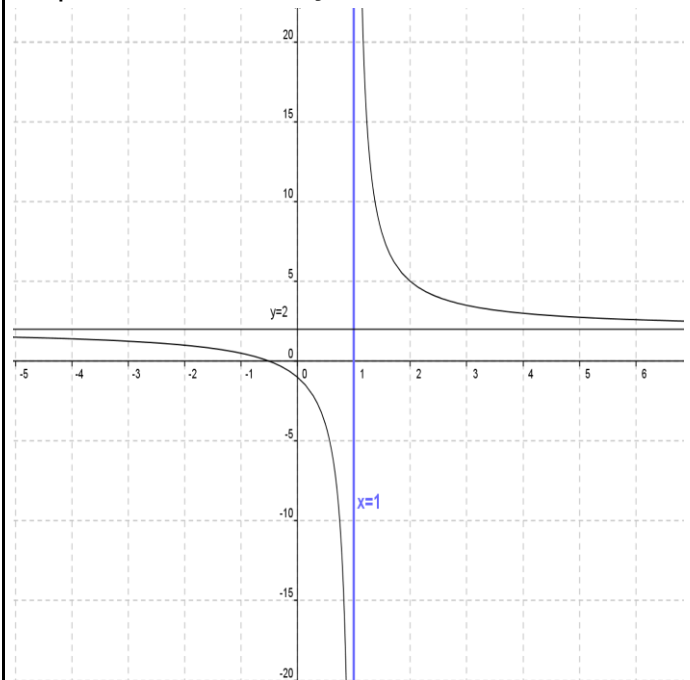
$$x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

- Représentation graphique

-2	1	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$



Exemples2:

Soit g une fonction numérique

$$\text{tq : } g(x) = \frac{-x}{x-2}$$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

$$\text{Donc } D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

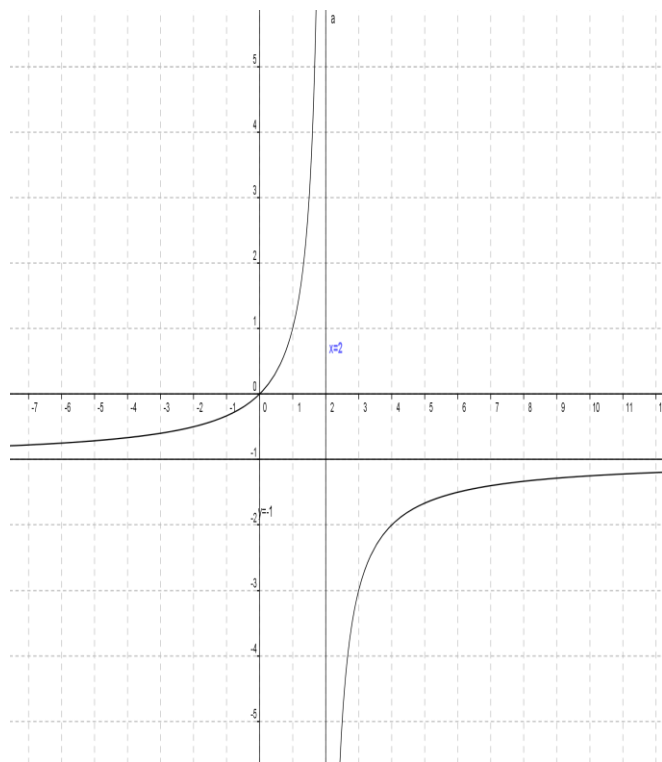
• Donc le tableau de variations

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

- Représentation graphique

-1	0	1	2	3	4	5
-1/3	0	1		-3	-2	-5/3

(C_f) est l'hyperbole de centre $W(2;-1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=2$ et $y=-1$



10) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} ax^3$

Exemple : Soit f une fonction numérique

définie par : $f(x) = \frac{1}{4}x^3$

1) Déterminer D_f

2) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1) $D_f = x \in \mathbb{R}$

2) soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1^3 < x_2^3$ Donc : $\frac{1}{4}x_1^3 < \frac{1}{4}x_2^3$

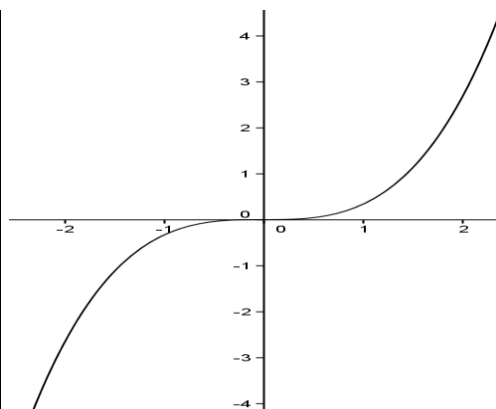
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6.5	-2	-1/4	0	1/4	2	6.5



11) Etude et représentation graphique de la fonction polynôme: $x \xrightarrow{f} \sqrt{a+x}$

Exemple : Soit f une fonction numérique

définie par : $f(x) = \sqrt{x+2}$

1) Déterminer D_f

2) étudier les variations de f et dresser le tableau de variation

3) tracer la dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) de f

Solutions : 1)

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2, +\infty[$

2) soient $x_1 \in [-2; +\infty[$ et $x_2 \in [-2; +\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc : $x_1 + 2 < x_2 + 2$ Donc : $\sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2}$

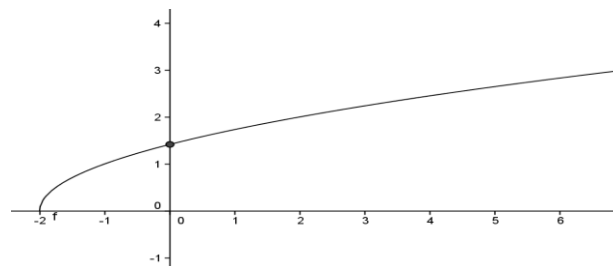
Donc : $f(x_1) < f(x_2)$

Donc f est strictement croissante

Tableau de variation :

x	-2	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

x	-2	-1	0	2	7
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	2	3



12) La composée de deux fonctions

13-1) Définition : Soit la fonction définie sur l'ensemble I et g la fonction définie sur l'ensemble J tel que : $\forall x \in I \quad f(x) \in J$

La composée des deux fonctions f et g est la fonction noté : $g \circ f$ définie sur I par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in I$$

On peut alors faire le schéma suivant :

$$x \rightarrow f(x) = y \rightarrow g(f(x)) = z$$

13-2) Exemples

Exemple1 : Soit les fonctions f et g

tel que : $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $g(x) = 2x + 1$

Déterminer : $g \circ f$ et $f \circ g$

Solution : on a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} \text{ et } D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 2x + 3) = 2(x^2 - 2x + 3) + 1$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 - 4x + 7$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2(2x + 1) + 3$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x - 2 + 3 = 4x^2 + 2$$

Remarque : 1) La composée de deux fonctions n'est pas commutative

c.-à-d. $g \circ f \neq f \circ g$

2) Soit D_f et D_g les ensembles de définition des fonctions f et g.

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

Exemple2 : Soit les fonctions f et g définies

par : $f(x) = 3x + 4$ et $g(x) = \frac{1}{x+1}$

1) Déterminer $D_{g \circ f}$

2) déterminer : $(g \circ f)(x)$

Solution : 1) $D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$

On a $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$ donc

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in \mathbb{R} \text{ et } f(x) \neq -1\}$$

$$f(x) = -1 \Leftrightarrow 3x + 4 = -1 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} = x$$

$$\text{donc : } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

2) on a : $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\text{et } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 4) = \frac{1}{3x + 4 + 1}$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{3x + 5}$$

Exemple3 : Soit les fonctions f et g définies

par : $g(x) = \frac{x}{x+2}$ et $f(x) = \frac{x+3}{x+1}$

On pose : $h(x) = (g \circ f)(x)$

1) Déterminer D_h 2) déterminer : $h(x)$

3) Soit la fonction k définie par : $k(x) = \frac{x+3}{3x+5}$

Les fonctions h et k sont-elles égales ?

Solution : 1) on a : $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ et

$$D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1 \text{ et } f(x) \neq -2\}$$

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} = -2$$

$$\Leftrightarrow -2(x+1) = x+3 \Leftrightarrow -3x = 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$\text{donc : } D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}; -1\right\}$$

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+3}{x+1}\right)$$

$$h(x) = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3}{x+1} + 2} = \frac{\frac{x+3}{x+1}}{\frac{x+3+2x+2}{x+1}} = \frac{x+3}{3x+5} = \frac{x+3}{3x+5}$$

$$\text{Donc : } h(x) = \frac{x+3}{3x+5}$$

3) Les fonctions h et k ne sont pas égales car ils n'ont pas le même ensemble de définition :

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}; -1\right\} \text{ et } D_k = \mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{3}\right\}$$

Exemple4 : exprimer les fonctions suivantes à l'aide de fonctions élémentaires :

$$1) h_1(x) = \frac{1}{3x-1} \quad 2) h_2(x) = \sqrt{x+3}$$

$$3) h_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$$

Solution : 1) $h_1(x) = \frac{1}{3x-1}$ on a : $h_1(x) = (g \circ f)(x)$

avec $f(x) = 3x-1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$

$$2) h_2(x) = \sqrt{x+3} \text{ on a : } h_2(x) = (g \circ f)(x)$$

avec $f(x) = x+3$ et $g(x) = \sqrt{x}$

3) $h_3(x) = 3\sqrt{x} + 4$ on a : $h_3(x) = (g \circ f)(x)$

avec $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = 3x+4$

13-3) Variations d'une fonction composée

Théorème : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et une fonction g définie sur $f(I)$.

$\Rightarrow$ Si f et g ont même variation respectivement sur I et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ Est croissante sur I .

$\Rightarrow$ Si f et g ont des variations opposées respectivement sur I et $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est décroissante sur I .

Remarque : Il peut être intéressant de décomposer une fonction en fonctions élémentaire

La fonction $g \circ f$ est décroissante sur I

Exemple1: Soit f la fonction f définie sur

un intervalle $[0; +\infty[$ tel que : $f(x) = -5x^2 + 7$

On va décomposer une fonction en fonctions élémentaire :

$v(x) = -5x + 7$ et $u(x) = x^2$

La fonction $f = v \circ u$

La fonction u est croissante sur $[0; +\infty[$ et

$u(x) = x^2 \in [0; +\infty[$ et I

v est décroissante sur

$[0; +\infty[$ Donc d'après le théorème des fonctions

composées, $f = v \circ u$ est décroissante sur

$[0; +\infty[$

Exemple2: Soit la fonction h définie sur $] -\infty; 1]$

par $h(x) = \sqrt{1-x}$

1) Décomposer h en deux fonctions élémentaires.

2) Déterminer les variations de h .

Solution : 1) La fonction h se décompose de cette façon $h = g \circ f$

on a alors : $f(x) = 1-x$ et $g(x) = \sqrt{x}$

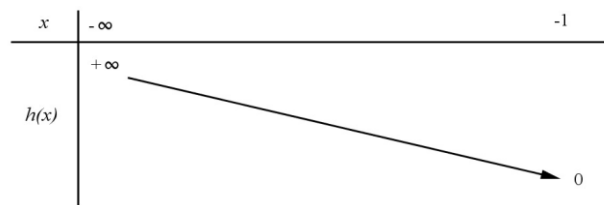
2) On sait que :

$\Rightarrow f$ est décroissante sur $] -\infty; 1]$

$\Rightarrow g$ est croissante sur $f(] -\infty; 1]) = [0; +\infty[$

Donc La fonction h décroissante sur $] -\infty; 1]$

On a alors le tableau de variation suivant



13) Fonctions périodiques :

Définition : On considère une fonction réelle f dont on note D l'ensemble de définition.

On dit que f est périodique de période T si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

a) $\forall x \in D$ on a $x+T \in D$

b) $\forall x \in D$ on a $f(x+T) = f(x)$

et la période de f c'est le plus petit réel strictement positif qui vérifie les conditions

Exemple de fonctions périodiques :

1. Une fonction constante sur $\mathbb{R}$ est périodique ; tout réel non nul en est une période.

2. La fonction $x \rightarrow E(x)$ est périodique, 1 est une période ainsi que tout entier non nul.

3. les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $T = 2\pi$ et la fonction tangente est périodique de période $T = \pi$

4) La période des fonctions: $f : x \rightarrow \cos(ax)$ et

$f : x \rightarrow \sin(ax)$ $a \neq 0$ est $T = \frac{2\pi}{a}$

Exemple1 : Montrer que la fonction

$f : x \rightarrow x - E(x)$ est périodique de période 1.

Solution : $D_f = \mathbb{R}$

a) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $x+1 \in \mathbb{R}$

b) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$f(x+1) = x+1 - E(x+1) = x+1 - E(x) - 1 = f(x)$

L'application f est donc périodique de période 1.

Exemple2 : Quelle est la période des fonctions suivantes :

1) $f : x \rightarrow \sin(4x-1)$ 2) $g : x \rightarrow \cos(5x)$

3) Trouver une fonction de période $T = \frac{3}{4}$

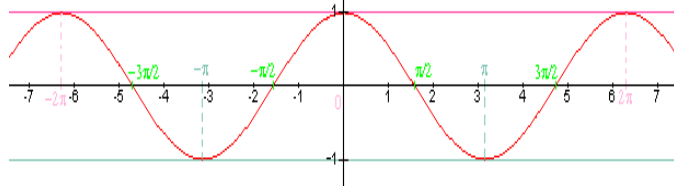
Solution : 1) $T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 2) $T = \frac{2\pi}{5}$

3) Une fonction est. $h : x \rightarrow \cos(\frac{8\pi}{3}x)$

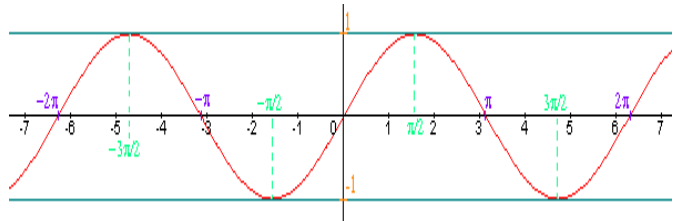
Remarque : La périodicité permet de réduire l'étude des variations d'une fonction à un intervalle de longueur égale à la période. Donc pour tracer la représentation graphique d'une fonction T -périodique, il suffit donc de

construire la courbe sur un intervalle de longueur T puis de translater autant de fois que nécessaire.

Exemple3 : Observons une courbe représentative de la fonction $\cos$ on a $T = 2\pi$ et sur $[-\pi; \pi]$ dont la longueur est égale à 2π . La courbe se répète tous les $T = 2\pi$.



Exemple4 : courbe représentative de la fonction $\sin$:



Exemple5: Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T = 2$ tel que : $f(x) = 2x - x^2 \quad \forall x \in [0; 2[$

1) Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2; 8]$ dans un repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$

2) calculer : $f(4.1)$; $f(-3.5)$; $f(265.11)$

Solution : dans l'intervalle $I_0 = [0; 2[$ on a f est une fonction polynôme donc

$$D_f = \mathbb{R}$$

On a $a = -1$ et $b = 2$ et $c = 0$

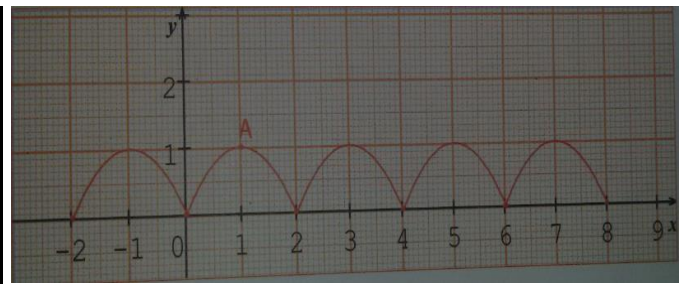
$$(f(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = 1 \quad \text{et} \quad (f(1) = 2 - 1 = 1)$$

Donc la courbe (C_f) c'est une portion parabole de sommet $A(1; 1)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Pour Tracer la représentation graphique de la fonction sur $[-2; 8]$ il suffit de Tracer la représentation graphique de la fonction sur $I_0 = [0; 2[$

et utiliser les translation $2k\vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$



2) calculer :

$$f(4.1) = f(2 + 2.1) = f(2.1) = f(2 + 0.1) = f(0.1)$$

$$f(4.1) = 2(0.1) - (0.1)^2 = 0.19$$

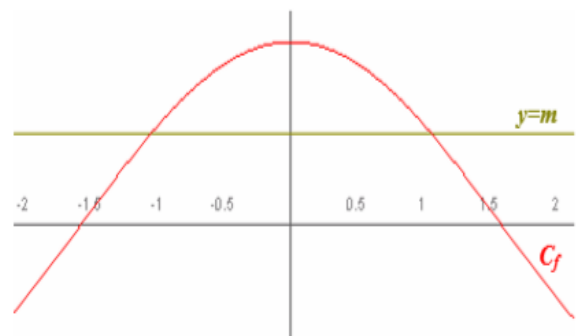
$$f(-3.5) = f(-4 + 0.5) = f(0.5)$$

$$f(-3.5) = 2(0.5) - (0.5)^2 = 0.75$$

$$f(265.11) = f(2 \times 132 + 1.11) = f(1.11)$$

$$f(1.11) = 2(1.11) - (1.11)^2 \approx 0.98$$

15) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

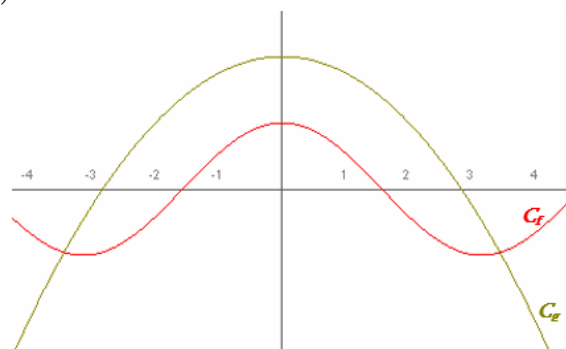


Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s). Il te permettra d'interpréter ensuite, dans des problèmes plus concrets, des situations liées à la physique, la chimie, l'économie, ?

1) Position relative de deux courbes et intersection

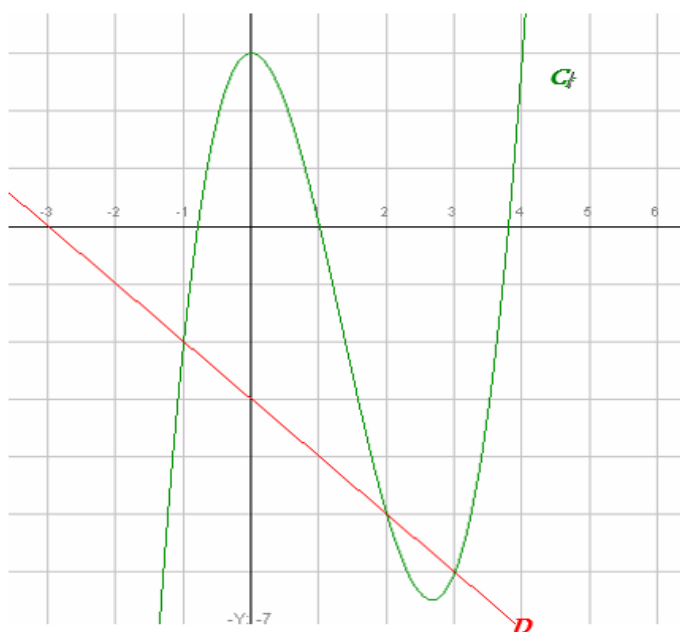
Soient (C_f) la courbe représentative de f et

(C_g) la courbe représentative de g .



On peut établir les relations suivantes :

$$M(x; y) \in (C_f) \text{ ssi } y = f(x)$$



$$M(x; y) \in (C_g) \text{ ssi } y = g(x)$$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g) , on a

$$M \in (C_f) \text{ et } M \in (C_g) \text{ donc}$$

$$\text{soit } f(x) = g(x)$$

A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessous de (C_g) .

Un cas particulier : équation $f(x) = m$ et inéquation $f(x) \geq m$

- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

2) Quelques exercices d'application

Exercice1 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite (D) d'équation $y = -x - 3$

1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$

puis l'inéquation $f(x) < 3$.

2- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$

puis l'inéquation $f(x) \geq 0$

3- Résoudre graphiquement l'équation

$f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$

Réponses : 1) $f(x) = 3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S = \{0; 4\}$

2- $f(x) = 0$ La solution est l'ensemble des

antécédents de 0 : $S = \{a; 1; b\}$ Avec $-1 < a < -0.5$ et $3.5 < b < 4$

$$f(x) \geq 0 \quad S = [a; 1] \cup [b; +\infty[$$

3- $f(x) = -x - 3$ La solution l'ensemble des

abscisses des points d'intersection de (C_f) et de D :

$$y = -x - 3 \text{ donc } S = \{-1; 2; 3\}$$

$$f(x) \leq -x - 3 \quad S =]-\infty; -1] \cup [2; 3]$$

Exercice2 : Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

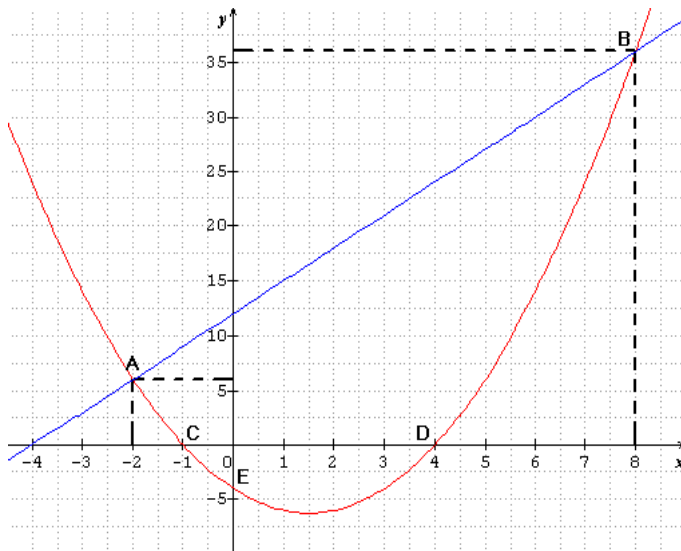
1) Tracer Les courbes (C_f) et (C_g)

2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$

3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$

4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 8$ donc $S = \{-2; 8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$$f(x) = g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 3x + 12 \text{ ssi } x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -6 \text{ et } c = -16$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

donc $S = \{-2; 8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si $x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

$$f(x) > g(x) \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 > 3x + 12 \text{ ssi } x^2 - 6x - 16 > 0$$

Les racines sont : $x_1 = 8$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$	
$x^2-6x-16$	$+$	0	$-$	0	$+$

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

5) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ ssi } x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$a = 1 \text{ et } b = -3 \text{ et } c = -4$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = (5)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

C(-1;0) et D(4;0)

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle et on a $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 - 4 = -4$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : E(-4;0)

Exercice3: Soient f et g les deux fonctions définies sur R par : $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ et

$g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ et (C_f) et (C_g) Les courbes représentatives de f et g

1) dresser le Tableau de variations de f et de g

2) a) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axes des abscisses

b) Trouver le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l' axes des abscisses

3) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g) dans le même repère

4) a) Résoudre graphiquement l'équation

$$f(x) = g(x)$$

b) Résoudre graphiquement l'inéquation

$$f(x) \geq g(x)$$

Réponses : 1) a) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = -1$ et $b = -2$ et $c = 3$

$$(f(x) = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{Donc } -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2 \times (-1)} = -1 \text{ et } (f(-1) = 4)$$

Donc la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $A(-1; 4)$

et d'axe de symétrie la droite $x = -1$

Donc le tableau de variations de f

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$		4	

$$1) b) g(x) = \frac{x-1}{x+2} \text{ on a } g(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x+2 \neq 0$$

$$\text{ssi } x \neq -2 \text{ Donc } D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 > 0$$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(-2; 1)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = -2$ et $y = 1$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$g(x)$			

2) a) Intersection de la

courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f)

avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$$f(x) = 0 \text{ ssi } -x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = \frac{2 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2 \times (-1)} = 1 \text{ donc les points d'intersection}$$

de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-3; 0)$ et $B(1; 0)$

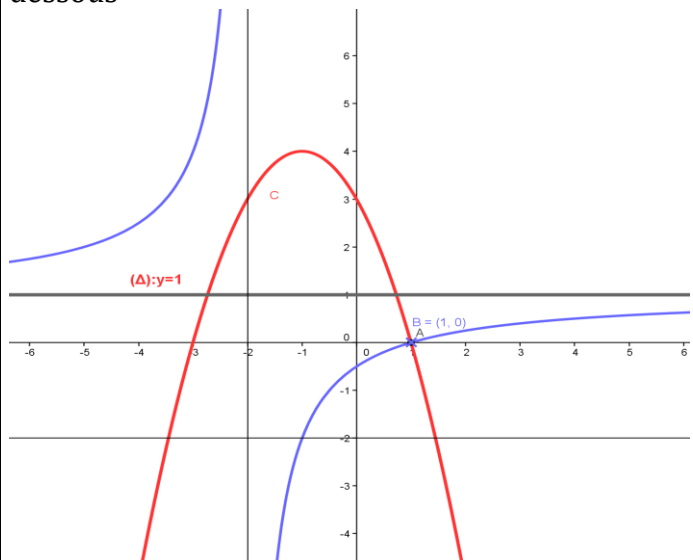
b) Intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses

$$g(x) = 0 \text{ ssi } \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

le point d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe des abscisses est : $C(1; 0)$

3) Représentation graphique

Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



4) a) résolution graphique de l'équation

$$f(x) = g(x)$$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

$$\text{On a donc } x = 1 \text{ donc } S = \{1\}$$

4) b) résolution graphique de l'inéquation

$$f(x) \geq g(x)$$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si

$$x \in]-2; 1]$$

$$\text{Donc } S =]-2; 1]$$

Exemple4 : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

1) Déterminer D_f

2) Démontrer que f est minorée.

3) Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$ Conclure

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

2) soit $x \in \mathbb{R}^+$ on a $x + \sqrt{x} \geq x$

Donc : $\sqrt{x+\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}$ donc

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \geq 0$$

f est donc minorée sur $\mathbb{R}^+$ par $m=0$

2) soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})} \geq 0$$

$$f(x) = \frac{x+\sqrt{x}-x}{(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x}}{x}} + 1)} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)}$$

Si $x \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$ donc $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} > 1$

donc $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} > 1$ donc $\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 > 2$

donc $\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1\right)} < \frac{1}{2}$ donc $f(x) < \frac{1}{2}$

et on a : $f(0) = 0 < \frac{1}{2}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^+ f(x) < \frac{1}{2}$

par suite f est majorée par $\frac{1}{2}$.

conclusion : $0 < f(x) < \frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

f est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exemple5 : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4$$

1) Démontrer que f admet une valeur minimale

3) Démontrer que f n'est pas majorée

Solution : 1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} + x - 4 = x^2 + 2x\sqrt{x} + (\sqrt{x})^2 - 4$$

$$f(x) = (x + \sqrt{x})^2 - 4 \text{ donc}$$

$$f(x) + 4 = (x + \sqrt{x})^2 \geq 0$$

donc $f(x) + 4 \geq 0$ donc $f(x) \geq -4$

et on a : $f(0) = -4$ donc $f(x) \geq f(0)$

donc $f(0) = -4$ est une valeur minimale de f au point $x_0 = 0$

2) Démontrons que f est non majorée.

Supposons f majorée donc :

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (x + \sqrt{x})^2 - 4 \leq M$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (x + \sqrt{x})^2 \leq M + 4$$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x + \sqrt{x} \leq \sqrt{M + 4}$ (on peut toujours supposer $M \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : (\sqrt{x})^2 + 2 \times \frac{1}{2} \sqrt{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M + 4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \sqrt{M + 4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{x} \leq \sqrt{\sqrt{M + 4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^+ : x \leq \left(\sqrt{\sqrt{M + 4} + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ Absurde}$$

Donc f est non majorée

Exercice6 : Soient f et g et h les trois fonctions définies par:

$$f(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2} \text{ et } g(x) = \frac{2x+3}{x-1} \text{ et}$$

$$h(x) = x^2 + 2$$

1)a) Etudier les variations de g et de h

b) étudier le signe de la fonction g

2) montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3) Etudier les variations de f dans les intervalles :

$$]1; +\infty[; \left[-\frac{3}{2}; 1\right[;]-\infty; -\frac{3}{2}]$$

$$\text{Réponses : 1)a) } g(x) = \frac{2x+3}{x-1}$$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

$$\text{Donc } D_g = \mathbb{R} - \{1\} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

(C_g) est l'hyperbole de centre $W(1;2)$ et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x=1$ et $y=2$

Donc le tableau de variations de g

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$			

1) a) on a n est une fonction polynôme donc $D_h = \mathbb{R}$

Donc le tableau de variations de h

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h(x)$			

b) étudions le signe de la fonction g sur $\mathbb{R} - \{1\}$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	1	$+\infty$
$2x+3$	-	0	+	+
$x-1$	-	-	0	+
$\frac{2x+3}{x-1}$	+	0	-	+

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$$

2) montrons que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

$$(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\frac{2x+3}{x-1}\right)$$

$$(h \circ g)(x) = \left(\frac{2x+3}{x-1}\right)^2 + 2 = \frac{4x^2 + 12x + 9 + 2x^2 - 4x + 2}{(x-1)^2}$$

$$(h \circ g)(x) = \frac{6x^2 + 8x + 11}{(x-1)^2}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

3) Etude des variations de f dans les intervalles :

a) sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$:

On a $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\} : f(x) = (h \circ g)(x)$

Puisque g est décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$ et

$\forall x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right] : g(x) \in [0; +\infty[$ et h est

croissante sur $[0; +\infty[$ alors $f = h \circ g$ est

décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{3}{2}\right]$

prof : atmani najib

b) sur $\left[-\frac{3}{2}; 1\right[$

Puisque g est décroissante sur $\left[-\frac{3}{2}; 1\right[$ et

$\forall x \in \left[-\frac{3}{2}; 1\right[: g(x) \in]-\infty; 0]$ et h est

décroissante sur $] -\infty; 0]$ alors $f = h \circ g$ est

croissante sur $\left[-\frac{3}{2}; 1\right[$

c) sur $]1; +\infty[$:

Puisque g est décroissante sur $]1; +\infty[$ et

$\forall x \in]1; +\infty[: g(x) \in]0; +\infty[$ et h est croissante

sur $]0; +\infty[$ alors $f = h \circ g$ est décroissante sur $]1; +\infty[$

Donc le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-3/2$	1	$+\infty$
$f(x)$				

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »

Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

prof: Atmani najib

