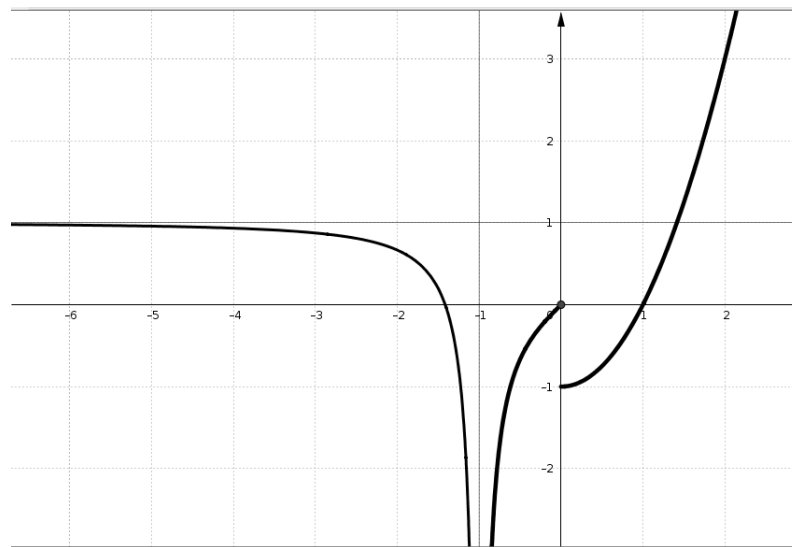


Devoir Surveillé 1

Veillez à faire une rédaction soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte.

Exercice 1 Soit f la fonction définie par sa courbe représentative suivante

- 1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
- 4) La fonction f admet-elle une limite au point $a = 0$?
- 5) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
- 6) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur D_f .



Exercice 2 Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(-\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1\right); \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 2x^2 - 3x - 1); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x^3 - x + 7}{x - x^3}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x}{x^2 - 5x + 6}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2}{-x + 1}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{2 \cos(x) - \sqrt{2}}$$

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; 2[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout $x \in]0; 2[$; $|f(x) - f(1)| \leq 3|x - 1|$.
- 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Exercice 4 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \cos(6x) - 5 \cos(2x)$

- 1) Montrer que; $\cos(6x) - \cos(2x) = -4 \sin^2(2x) \cos(2x)$

- 2) En déduire que : $F(x) = -4 \cos(2x)(1 + \sin^2(2x))$
- 3) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $F(x) = 0$.

Exercice 5 On considère la suite numérique $(U_n)_n$ définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{3 + U_n}, U_0 = 2$$

Et posons $(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = \frac{1}{U_n - 1}$.

- 1) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n > 1$
- 2) Prouver que (V_n) est suite arithmétique en déterminant sa raison.
- 3) Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .

Bonne chance