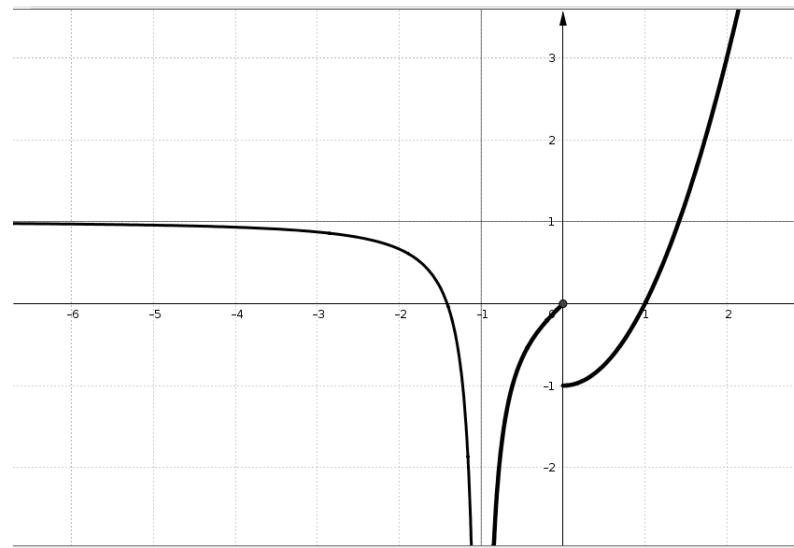


## Devoir Surveillé 1

Veillez à faire une rédaction soignée de vos réponses. Celle-ci sera prise en compte.

**Exercice 1** Soit  $f$  la fonction définie par sa courbe représentative suivante

- 1) Déterminer  $D_f$  le domaine de définition de la fonction  $f$ .
- 2) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$
- 4) La fonction  $f$  admet-elle une limite au point  $a = 0$  ?
- 5) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
- 6) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $D_f$ .



**Exercice 2** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left( -\frac{1}{2}x^2 - 3x + 1 \right); \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x^3 + 2x^2 - 3x - 1 \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3}x^3 - x + 7}{x - x^3}; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x - 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x}{x^2 - 5x + 6}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 2}{-x + 1}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan(x)}{2 \cos(x) - \sqrt{2}}$$

**Exercice 3** Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0; 2[$  par :

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 - 1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 0 & \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout  $x \in ]0; 2[$ ;  $|f(x) - f(1)| \leq 3|x - 1|$ .
- 2) En déduire  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Exercice 4** On pose pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \cos(6x) - 5 \cos(2x)$

- 1) Monter que ;  $\cos(6x) - \cos(2x) = -4 \sin^2(2x) \cos(2x)$

- 2) En déduire que :  $F(x) = -4 \cos(2x)(1 + \sin^2(2x))$
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $F(x) = 0$ .

**Exercice 5** On considère la suite numérique  $(U_n)_n$  définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} = \frac{5U_n - 1}{3 + U_n} , \quad U_0 = 2$$

Et posons  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; V_n = \frac{1}{U_n - 1}$ .

- 1) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n > 1$
- 2) Prouver que  $(V_n)$  est suite arithmétique en déterminant sa raison.
- 3) Déterminer  $V_n$  puis  $U_n$  en fonction de  $n$ .

*Bonne chance*