

1er Devoir surveillé

Exercice 1 (4 Points).

1. En utilisant le raisonnement par contraposée, montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), \left[(x \neq y) \wedge (xy \neq 1) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} \neq \frac{\sqrt{y}}{y + \sqrt{y} + 1} \right].$$

2. Montrer que

$$(a) \ 1(3 \times 1 + 1) + 2(3 \times 2 + 1) + 3(3 \times 3 + 1) + \dots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2, (\forall n \in \mathbb{N}^*).$$

Exercice 2 (4 Points).

1. Soient a et b de \mathbb{R}^+ tels que $a + b = 0$, montrer par l'absurde que $a = 0$ et $b = 0$.
2. En déduire les solutions des deux équations suivantes :

$$(a) \ x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

$$(b) \ \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{y^2 + 2} = 0$$

Exercice 3 (6 Points).

Soient f une fonction numérique définie par

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 2}$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f .
(b) Montrer que f est majorée par 1.
(c) Montrer que f admet une valeur minimale en $a = \frac{1}{2}$.
2. On considère la fonction numérique h définie par

$$h(x) = \frac{x}{x + 2}$$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition de h .
(b) Étudier la variation de h sur D_h .
(c) En déduire la variation de f sur D_f .

Exercice 4 (6 Points).

On considère les deux fonctions numériques f et g définies par

$$f(x) = \frac{2(x-1)}{2-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{3}x^3$$

1. Dresser le tableau de variation de f et g .
2. Résoudre dans $] -\infty, 2[$ l'équation $f(x) = 0$, en déduire une interprétation géométrique du résultat.
3. Tracer les courbes (C_f) et (C_g) dans un même repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
4. Déterminer graphiquement l'ensemble de solutions de l'inéquation sur $\mathbb{R}^* \setminus \{2\}$

$$\frac{3(x-1)}{x^2} \leq x(2-x).$$

(On admet que α et β avec $\alpha < \beta$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.)

1 point supplémentaire sur la bonne présentation de la copie